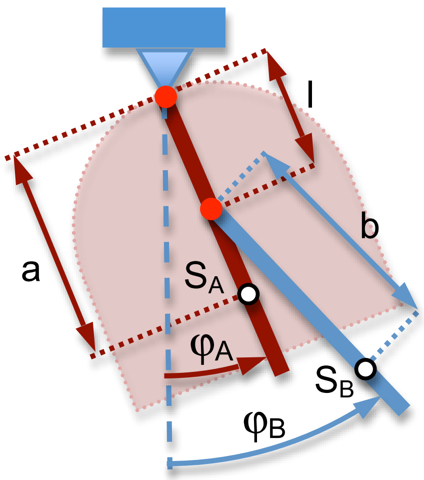
Stumme Kaiserglocke



<u>Orts-, Geschwindigkeitsvektoren beider Pendelschwerpunkte:</u>

$$\vec{r}_{SA} = a\left(\sin\varphi_A, -\cos\varphi_A\right)$$

$$\dot{\vec{r}}_{SA} = a\omega_A\left(\cos\varphi_A, \sin\varphi_A\right)$$

$$\vec{r}_{SB} = \left(l\sin\varphi_A + b\sin\varphi_B, -l\cos\varphi_A - b\cos\varphi_B\right)$$

$$\dot{\vec{r}}_{SB} = \left(l\omega_A\cos\varphi_A + b\omega_B\cos\varphi_B, l\omega_A\sin\phi_A + b\omega_B\sin\varphi_B\right)$$

ω_A, ω_B Winkelgeschwindigkeiten von Glocke bzw. Klöppel

<u>Kinetische Energie:</u>

$$T = \frac{m_A}{2}\dot{\vec{r}}_{SA}^{\,2} + \frac{J_{SA}}{2}\omega_A^2 + \frac{m_B}{2}\dot{\vec{r}}_{SB}^{\,2} + \frac{J_{SB}}{2}\omega_B^2$$

<u>Potentielle Energie:</u>

$$E_P = -g\left[m_A a\cos\varphi_A + m_B\left(l\cos\varphi_A + b\cos\varphi_B\right)\right]$$

m_A, m_B	Masse der Glocke bzw. des Klöppels
J_{SA}, J_{SB}	Massenträgheitsmoment der Glocke A bzw. des Klöppels B, bezogen auf ihre eigenen Schwerpunkte
l	Distanz zwischen den Aufhängepunkten A und B
a, b	Abstände des Glocken- bzw. Klöppelschwerpunktes zur Achse A bzw. B
g	Erdbeschleunigung

<u>Satz von Steiner:</u>

$$J_A = J_{SA} + m_A a^2 \qquad J_B = J_{SB} + m_B b^2$$

J_A, J_B Massenträgheitsmomente beider Pendel bzgl. ihrer Aufhängepunkte

<u>Lagrange-Funktion:</u>

$$L = T - E_P = \frac{J_A + m_B l^2}{2}\omega_A^2 + \frac{J_B}{2}\omega_B^2 + m_B l b \omega_A \omega_B \cos\left(\varphi_A - \varphi_B\right)$$
$$+ g\left[\left(m_A a + m_B l\right)\cos\varphi_A + m_B b \cos\varphi_B\right]$$

<u>Bewegungsgleichungen (Lagrangeformalismus):</u>

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \omega_A} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_A} = Q_A \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \omega_B} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_B} = Q_B$$

Q_A, Q_B verallgemeinerte Momente

<u>Bewegungsgleichungen Doppelpendel (freie Schwingungen):</u>

$$\left(J_A + m_B l^2\right)\dot{\omega}_A + m_B l b\left[\dot{\omega}_B \cos\left(\varphi_A - \varphi_B\right) + \omega_B^2 \sin\left(\varphi_A - \varphi_B\right)\right] + \left(m_A a + m_B l\right) g \sin\varphi_A = 0$$

$$J_B \dot{\omega}_B + m_B l b\left[\dot{\omega}_A \cos\left(\varphi_A - \varphi_B\right) - \omega_A^2 \sin\left(\varphi_A - \varphi_B\right)\right] + m_B b g \sin\varphi_B = 0$$

<u>Synchrone Schwingungen (stumme Glocke):</u>

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \varphi_B \equiv \varphi \\ \omega_A &= \omega_B \equiv \omega \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} + \frac{m_A a + m_B l}{J_A + m_B l\left(l + b\right)} g \sin\varphi = 0 \qquad \dot{\omega} + \frac{m_B b}{J_B + m_B l b} g \sin\varphi = 0$$

<u>Bedingung für stumme Glocke:</u>

$$\frac{m_A a + m_B l}{J_A + m_B l\left(l + b\right)} = \frac{m_B b}{J_B + m_B l b}$$

Bewegungsgleichungen Doppelpendel (erregte Schwingungen):

$$C_0\dot{\omega}_A + C_1\left[\dot{\omega}_B\cos\left(\varphi_A-\varphi_B\right)+\omega_B^2\sin\left(\varphi_A-\varphi_B\right)\right]+C_4 g\sin\varphi_A = Q_A$$

$$J_B\dot{\omega}_B + C_1\left[\dot{\omega}_A\cos\left(\varphi_A-\varphi_B\right)-\omega_A^2\sin\left(\varphi_A-\varphi_B\right)\right]+\frac{g}{l}C_1\sin\varphi_B = Q_B$$

mit

$$C_0 = J_A + m_B l^2 \qquad C_1 = m_B l b \qquad C_4 = m_A a + m_B l$$

$$C_2 = \frac{m_B l b}{J_B} \qquad C_3 = \frac{m_B l b}{J_A + m_B l^2}$$

Differentialgleichungssystem 1. Ordnung:
(Separation der Winkelbeschleunigungen → Standardform zur numerischen Lösung der Differentialgleichungen)

$$\dot{\varphi}_A = \omega_A$$

$$\dot{\omega}_A = \frac{1}{C_0 - C_1 C_2\cos^2\left(\varphi_A-\varphi_B\right)}\left[\begin{array}{l} Q_A - gC_4\sin\varphi_A - C_1\omega_B^2\sin\left(\varphi_A-\varphi_B\right) - \\ C_2\left(Q_B\cos\left(\varphi_A-\varphi_B\right)+C_1\left[\frac{\omega_A^2}{2}\sin 2\left(\varphi_A-\varphi_B\right)-\frac{g}{l}\sin\varphi_B\cos\left(\varphi_A-\varphi_B\right)\right]\right)\end{array}\right]$$

$$\dot{\varphi}_B = \omega_B$$

$$\dot{\omega}_B = \frac{1}{J_B - C_1 C_3\cos^2\left(\varphi_A-\varphi_B\right)}\left[\begin{array}{l} Q_B - C_1\left(\frac{g}{l}\sin\varphi_B - \omega_A^2\sin\left(\varphi_A-\varphi_B\right)\right) - \\ C_3\left(Q_A\cos\left(\varphi_A-\varphi_B\right)-\frac{C_1}{2}\omega_B^2\sin 2\left(\varphi_A-\varphi_B\right)-gC_4\sin\varphi_A\cos\left(\varphi_A-\varphi_B\right)\right)\end{array}\right]$$

Numerisches Lösungsverfahren (Runge-Kutta, 5. Ordnung)

$$\begin{pmatrix}\dot{\varphi}_A(t)\\ \dot{\omega}_A(t)\\ \dot{\varphi}_B(t)\\ \dot{\omega}_B(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega_A(t)\\ F_A\left(\varphi_A(t),\omega_A(t),\varphi_B(t),\omega_B(t)\right)\\ \omega_B(t)\\ F_B\left(\varphi_A(t),\omega_A(t),\varphi_B(t),\omega_B(t)\right)\end{pmatrix}$$

t Zeit

Einschrittverfahren: Schrittweite h, Fehler $0\left(h^5\right)$

Stützwerte $\quad t_{i+1} = t_i + h$

$$\begin{pmatrix} \varphi_{Ai+1} \\ \omega_{Ai+1} \\ \varphi_{Bi+1} \\ \omega_{Bi+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{Ai} \\ \omega_{Ai} \\ \varphi_{Bi} \\ \omega_{Bi} \end{pmatrix} + \frac{h}{6}\left[\begin{pmatrix} k_{A1} \\ k_{Ap1} \\ k_{B1} \\ k_{Bp1} \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} k_{A2} \\ k_{Ap2} \\ k_{B2} \\ k_{Bp2} \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} k_{A3} \\ k_{Ap3} \\ k_{B3} \\ k_{Bp3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{A4} \\ k_{Ap4} \\ k_{B4} \\ k_{Bp4} \end{pmatrix}\right]$$

Hilfsgrößen

$$\begin{pmatrix} k_{A1} \\ k_{Ap1} \\ k_{B1} \\ k_{Bp1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{Ai} \\ F_A\left(\varphi_{Ai},\omega_{Ai},\varphi_{Bi},\omega_{Bi}\right) \\ \omega_{Bi} \\ F_B\left(\varphi_{Ai},\omega_{Ai},\varphi_{Bi},\omega_{Bi}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_{A2} \\ k_{Ap2} \\ k_{B2} \\ k_{Bp2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{Ai} + \frac{h}{2}k_{Ap1} \\ F_A\left(\varphi_{Ai} + \frac{h}{2}k_{A1},\omega_{Ai} + \frac{h}{2}k_{Ap1},\varphi_{Bi} + \frac{h}{2}k_{B1},\omega_{Bi} + \frac{h}{2}k_{Bp1}\right) \\ \omega_{B} + \frac{h}{2}k_{Bp1} \\ F_B\left(\varphi_{Ai} + \frac{h}{2}k_{A1},\omega_{Ai} + \frac{h}{2}k_{Ap1},\varphi_{Bi} + \frac{h}{2}k_{B1},\omega_{Bi} + \frac{h}{2}k_{Bp1}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_{A3} \\ k_{Ap3} \\ k_{B3} \\ k_{Bp3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{Ai} + \frac{h}{2}k_{Ap2} \\ F_A\left(\varphi_{Ai} + \frac{h}{2}k_{A2},\omega_{Ai} + \frac{h}{2}k_{Ap2},\varphi_{Bi} + \frac{h}{2}k_{B2},\omega_{Bi} + \frac{h}{2}k_{Bp2}\right) \\ \omega_{Bi} + \frac{h}{2}k_{Bp2} \\ F_B\left(\varphi_{Ai} + \frac{h}{2}k_{A2},\omega_{Ai} + \frac{h}{2}k_{Ap2},\varphi_{Bi} + \frac{h}{2}k_{B2},\omega_{Bi} + \frac{h}{2}k_{Bp2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k_{A4} \\ k_{Ap4} \\ k_{B4} \\ k_{Bp4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{Ai} + hk_{Ap3} \\ F_A\left(\varphi_{Ai} + hk_{A3},\omega_{Ai} + hk_{Ap3},\varphi_{Bi} + hk_{B3},\omega_{Bi} + hk_{Bp3}\right) \\ \omega_{Bi} + hk_{Bp3} \\ F_B\left(\varphi_{Ai} + hk_{A3},\omega_{Ai} + hk_{Ap3},\varphi_{Bi} + hk_{B3},\omega_{Bi} + hk_{Bp3}\right) \end{pmatrix}$$