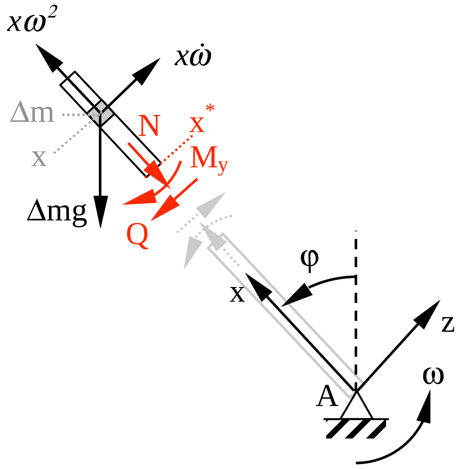
Kippender, elastischer Stab



$$\Delta m = \frac{\Delta x}{L} m$$

Vektor Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \left(0, \omega, 0\right)$$

Ortsvektor$\left(\Delta m\right)$

$$\vec{r} = \left(x, 0, 0\right)$$

Führungskraft (köperfestes, rotierendes Bezugssystem (x,y,z))

$$-\Delta m\left[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - \vec{r} \times \dot{\vec{\omega}}\right] = \Delta m\left(x\omega^2, 0, x\dot{\omega}\right)$$

<u>Schnittgrößen</u> $\left(x = x^*\right)$:

Kräftebilanzen

$$-N\left(x^*, \varphi\right) - \int_{x^*}^{L} \left(g\cos\varphi - \omega^2 x\right)\frac{m}{L}\,dx = 0$$

$$-Q\left(x^*, \varphi\right) - \int_{x^*}^{L} \left(g\sin\varphi - \dot{\omega} x\right)\frac{m}{L}\,dx = 0$$

Momentenbilanz

$$-M_y\left(x^*, \varphi\right) + \int_{x^*}^{L} \left(g\sin\varphi - \dot{\omega} x\right)\left(x - x^*\right)\frac{m}{L}\,dx = 0$$

Drallsatz bzgl. Lager A

$$J_A \dot{\omega} = mg\frac{L}{2}\sin\varphi$$

Massenträgheitsmoment bzgl. Lager A

$$J_A = \frac{1}{3} m L^2$$

Winkelbeschleunigung

$$\dot{\omega} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\varphi$$

Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}J_A\omega^2 + mg\frac{L}{2}\cos\varphi = mg\frac{L}{2}$$

Winkelgeschwindigkeit

$$\omega^2 = \frac{1}{3}\frac{g}{L}\left(1-\cos\varphi\right)$$

---

lokale Längskraft

$$N\left(x^*,\varphi\right) = -\frac{1}{6}mg\left(1-\frac{x^*}{L}\right)\left[\left(7+\frac{x^*}{L}\right)\cos\varphi - \left(1+\frac{x^*}{L}\right)\right]$$

lokale Querkraft

$$Q(x^*,\varphi) = -\frac{1}{4}mg\sin\varphi\left[1-4\frac{x^*}{L}+3\left(\frac{x^*}{L}\right)^2\right]$$

lokales Moment

$$M_y\left(x^*,\varphi\right) = -\frac{1}{4}x^*\left(1-\frac{x^*}{L}\right)^2 mg\sin\varphi$$

Extremwert $\left(x^* = \frac{L}{3}\right)$

$$M_y\left(\frac{L}{3},\varphi\right) = -\frac{1}{27}Lmg\sin\varphi$$

Nach einer Sprengung brechen Schornsteine im Fallen in etwa ein Drittel ihrer Höhe, da das lokale Biegemoment dort einen Extremwert annimmt.

Lagerkräfte

$$N = -\frac{1}{6}mg\left(7\cos\varphi - 1\right) \qquad Q = -\frac{1}{4}mg\sin\varphi \qquad \text{(bis zum Bruch)}$$

Biegelinien im körpereigenen, rotierenden System

$$\frac{d^2u_z}{dx^2} = -\frac{M_y\left(x,\varphi\right)}{EI_{yy}} \quad\Rightarrow\quad u_z\left(x,\varphi\right) = \frac{mgL\sin\varphi}{24EI_{yy}}\left(\frac{x}{L}\right)^3\left[1-\frac{x}{L}+\frac{3}{10}\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

E – Elastizitätsmodul
E_{yy} – Flächenmoment 2. Ordnung