Momentenfreier, symmetrischer Kreisel

Eulersche dynamische Gleichungen:

$$\dot{\omega}_1 J_1 - \omega_2\omega_3\left(J_2 - J_3\right) = 0$$
$$\dot{\omega}_2 J_2 - \omega_3\omega_1\left(J_3 - J_1\right) = 0$$
$$\dot{\omega}_3 J_3 - \omega_1\omega_2\left(J_1 - J_2\right) = 0$$

körpereigenes Hauptachsensystem (1,2,3)

Will P., Lämmel B. Kleine Formelsammlung Technische Mechanik,
Fachbuchverlag Leipzig, 4. Auflage, S 118

symmetrischer Körper:

$J_1 = J_2 \neq J_3$

$$\dot{\omega}_1 J_1 - \omega_2\omega_3\left(J_1 - J_3\right) = 0$$
$$\dot{\omega}_2 J_1 - \omega_3\omega_1\left(J_3 - J_1\right) = 0$$

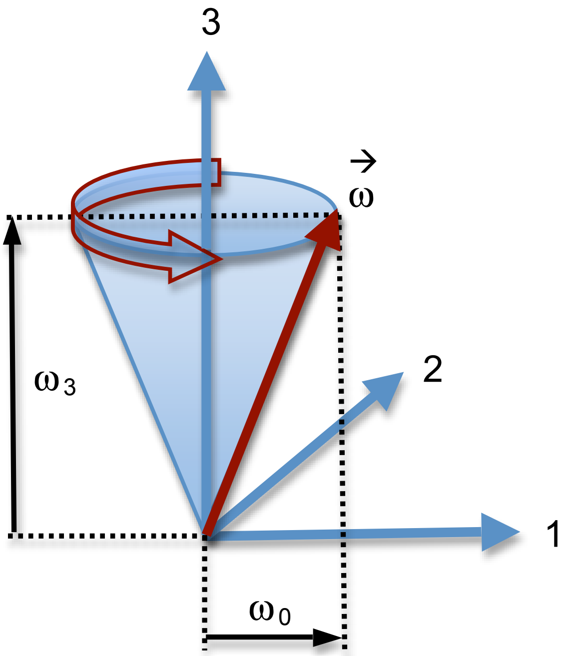
$$\dot{\omega}_3 J_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = const.$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_e &= 0 \\ \dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_e &= 0 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad \ddot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2\omega_e = \ddot{\omega}_1 + \omega_1\omega_e^2 = 0$$

mit $\quad \omega_e = \omega_3\left(1 - \dfrac{J_3}{J_1}\right)$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 \sin\left(\omega_e t + \varphi_0\right) \\ \omega_2 &= \frac{\dot{\omega}_1}{\omega_e} = \omega_0 \cos\left(\omega_e t + \varphi_0\right) \end{aligned} \qquad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_0 \sin\left(\omega_e t + \varphi_0\right) \\ \omega_0 \cos\left(\omega_e t + \varphi_0\right) \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Die Integrationskonstanten ω_0, φ_0 folgen aus Anfangsbedingungen, wobei auch der Sonderfall $\omega_0 = 0$ denkbar ist.



$$\omega_e = \omega_3\left(1 - \frac{J_3}{J_1}\right)$$

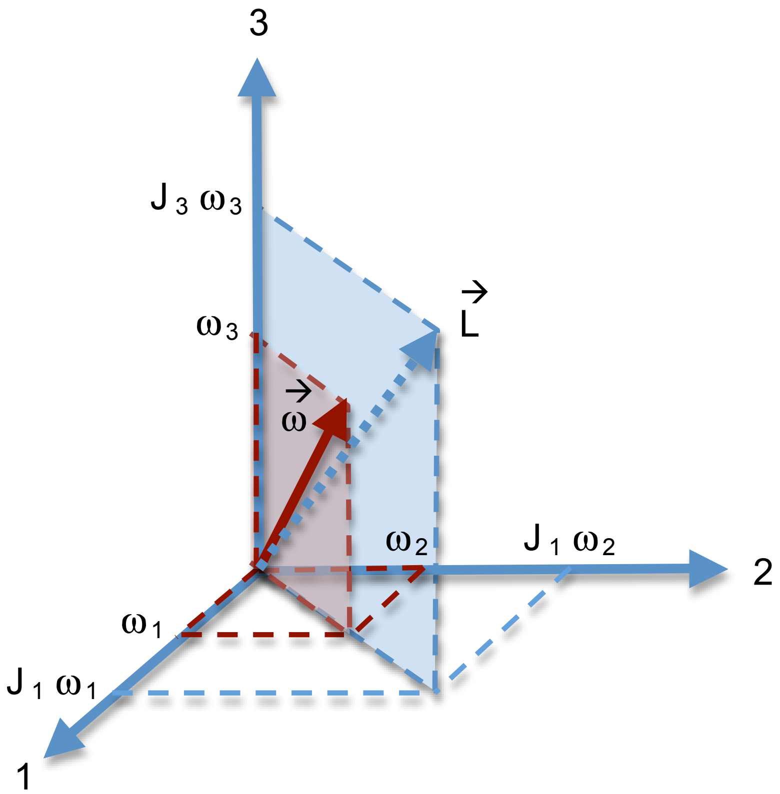
Die momentane Drehachse $\vec{\omega}$ rotiert im körpereigenen Bezugssystem (1,2,3) mit der Winkelgeschwindigkeit ω_e auf einem Kreiskegel (Gangpolkegel) um die Figurenachse 3.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_3^2} = const.$$

<u>Drehimpuls:</u>

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1\omega_0 \sin\left(\omega_e t + \varphi_0\right) \\ J_1\omega_0 \cos\left(\omega_e t + \varphi_0\right) \\ J_3\omega_3 \end{pmatrix}$$

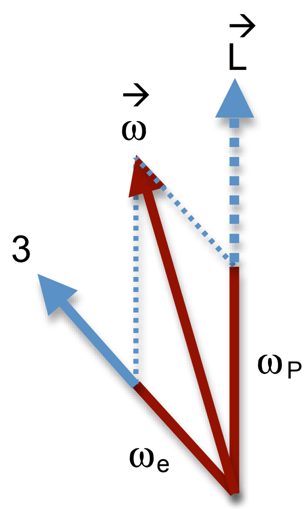
Der Einheitsvektor $\vec{e}_3$ liegt mit den Vektoren $\vec{\omega},\vec{L}$ in einer Ebene (s. Skizze).



<u>Winkelgeschwindigkeit im raumfesten System:</u>

Gemäß Aufgabenstellung wird Momentenfreiheit vorausgesetzt, deshalb ist der Drehimpuls raumfest.

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_0 \sin\left(\omega_e t + \varphi_0\right) \\ \omega_0 \cos\left(\omega_e t + \varphi_0\right) \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{J_1}\vec{L} + \omega_e \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Der erste Summand im obigen Ausdruck steht für die Projektion der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ auf die Achse des Drehimpulses $\vec{L}$ (s. Skizze).

$$\vec{\omega}_P = \frac{1}{J_1}\vec{L}$$

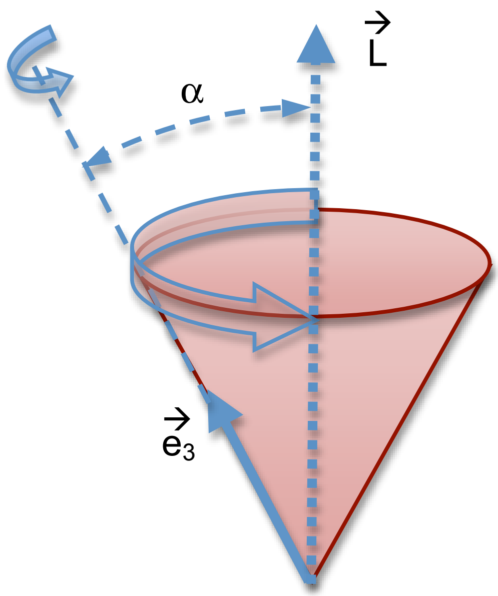
Der 2. Term entspricht der Eigendrehung ω_e um die Figurenachse 3.

Im Sonderfall $\omega_0 = 0$ liegen Figurenachse, Winkelgeschwindigkeit und Drehimpuls auf einer Linie.

Die Figurenachse 3 selbst rotiert i. Allg. um die raumfeste Drehimpulsachse $\vec{L}$ auf dem Nutationskegel (Öffnungswinkel 2α) mit der Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega_P = \frac{L}{J_1} \qquad J_3\omega_3 = \vec{e}_3\vec{L} = L\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \omega_P = \frac{J_3\omega_3}{J_1\cos\alpha}$$

(reguläre Präzession)



Zwischen den beiden Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im raumfesten Koordinatensystem besteht folgende Beziehung:

$$J_3\omega_e = \left(J_1 - J_3\right)\omega_P\cos\alpha$$

Kinetische Energie des momentenfreien Kreisels

$$T = \frac{1}{2}\vec{L}\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(J_1\omega_0^2 + J_3\omega_3^2\right) \qquad \omega_0^2 = \omega^2 - \omega_3^2$$

$$T == \frac{1}{2}\left[J_1\omega^2 + \left(J_3 - J_1\right)\omega_3^2\right]$$

$$\omega^2 = \omega_e^2 + \omega_p^2 + \omega_e\omega_p 2\cos\alpha \qquad \omega_3 = \frac{J_1}{J_1 - J_3}\omega_e \qquad \frac{J_3}{J_1 - J_3}\omega_e^2 = \omega_e\omega_p\cos\alpha$$

$$T == \frac{1}{2}J_1\omega_p^2\left[1 + \frac{\omega_e}{\omega_p}\cos\alpha\right]$$