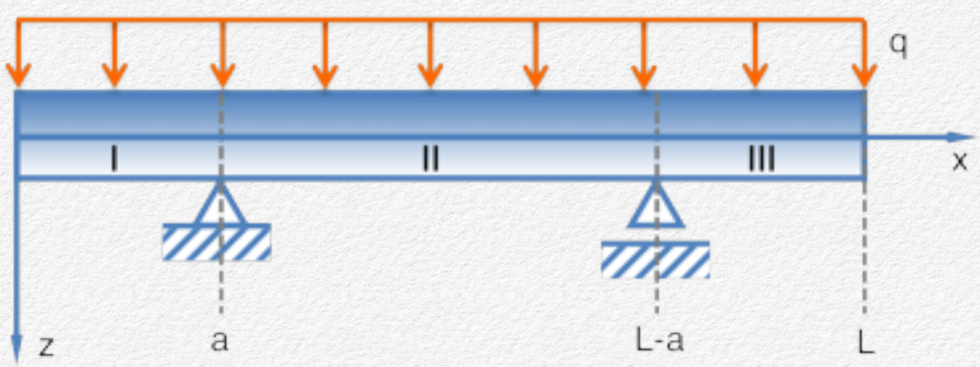
Aufgabe 25:

Lange, gleichmäßig belastete Balken sollen in Konstruktionen so gestützt oder Bretter auf jeweils zwei Leisten so gestapelt werden, dass Deformationen infolge der Beanspruchung bzw. des Eigengewichts möglichst geringe Werte annehmen.

- Finden Sie die Lagerpositionen *a* bzw. *(L-a)* für eine optimierte, symmetrische Lagerung des skizzierten Biegeträgers.



- Der Träger ist mit einer konstanten Linienlast *q* belastet.
- Optimale Lagerung soll dann vorliegen, wenn die mittlere Durchbiegung über die gesamte Länge *L* der Anordnung ein Minimum aufweist.

Die Auflagerpositionen eines gleichmäßig belasteten Balkens, bei denen der mittlere Biegepfeil (genauer: der neutralen Faser) minimal ist, ergeben sich aus folgenden Überlegungen.

Lagerkräfte (symmetrische Lagerung):

$$F = \frac{qL}{2}$$

Momentenbilanzen:
Lokale Biegemomente in den Bereichen

$0 \le x < a$:

$$\int_0^x q(x - x^*)dx^* + M_{yI}(x) = 0 \qquad M_{yI}(x) = -q\frac{x^2}{2}$$

$a \le x < L - a$:

$$\int_0^x q(x - x^*)dx^* - F(x - a) + M_{yII}(x) = 0$$

$$M_{yII}(x) = -\frac{q}{2}\left(x^2 - L(x - a)\right)$$

$L - a \le x \le L$:

$$\int_0^x q(x - x^*)dx^* - F(x - a) - F(x - L + a) + M_{yIII}(x) = 0$$

$$M_{yIII}(x) = -\frac{q}{2}(x - L)^2$$

Differentialgleichung der Biegelinie:

$$\frac{d^2u_z}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{EI}$$

E Elastizitätsmodul
I Flächenmoment 2. Ordnung

2-fache Integration:
Teillösungen der Biegelinie in den Bereichen

$0 \le x < a$:

$$u_{zI}(x) = \frac{q}{24EI}\left(x^4 + C_1 x + C_2\right)$$

$a \le x < L - a$:

$$u_{zII}(x) = \frac{q}{24EI}\left(x^4 - 2Lx^3 + 6Lax^2 + C_3 x + C_4\right)$$

$L - a \le x \le L$:

$$u_{zIII}(x) = \frac{q}{24EI}\left(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2 + C_5 x + C_6\right)$$

Die Integrationskonstanten $C_1 ... C_6$ folgen aus den Lagerbedingungen:

$$u_{zI}(x = a) = 0 \qquad u_{zII}(x = a) = 0$$

$$u_{zII}(x = L - a) = 0 \qquad u_{zIII}(x = L - a) = 0$$

$$C_1 a + C_2 = -a^4 \qquad C_3 a + C_4 = -a^3(a + 4L)$$

$$C_3(L - a) + C_4 = -(L - a)^2\left[a^2 + 6La - L^2\right]$$

$$C_5(L - a) + C_6 = -(L - a)^2\left[a^2 + 2La + 3L^2\right]$$

und Anschlüssen zwischen den lokalen Teillösungen an den Bereichsgrenzen:

$$\left.\frac{du_{zI}}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{du_{zII}}{dx}\right|_{x=a} \qquad \left.\frac{du_{zII}}{dx}\right|_{x=L-a} = \left.\frac{du_{zIII}}{dx}\right|_{x=L-a}$$

$$C_1 - C_3 = 6La^2$$

$$C_3 - C_5 = 6L(L - a)^2$$

$$C_1 = L\left(L^2 - 6La + 6a^2\right)$$

$$C_2 = -a\left(a^3 + 6La^2 - 6L^2a + L^3\right)$$

$$C_3 = L^2\left(L - 6a\right)$$

$$C_4 = -a\left(a^3 + 4La^2 - 6L^2a + L^3\right)$$

$$C_5 = -L\left(6a^2 - 6La + 5L^2\right)$$

$$C_6 = (L - a)\left(a^3 + 7La^2 - 5L^2a + 2L^3\right)$$

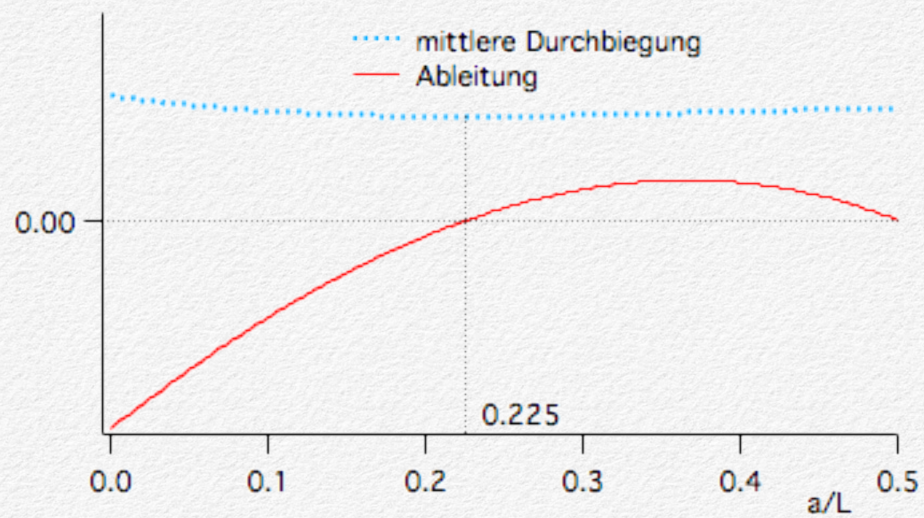
Optimale Lagerung liegt a priori dann vor, wenn die Mittelung der Durchbiegungen über die gesamte Balkenlänge *L* ein Minimum in Abhängigkeit von der Lagerposition *a* ergibt.

$$\frac{1}{L}\left(\int_0^a u_{zI}(x)dx + \int_a^{L-a} u_{zII}(x)dx + \int_{L-a}^{L} u_{zIII}(x)dx\right)$$

$$= \frac{q}{24EIL}\left[\begin{array}{l}\frac{3}{2}L\left(\frac{4}{5}L^4 - (L-a)^4 - a^4\right) + a\left(\frac{C_1}{2}a + C_2\right) + \\ (L-2a)\left(\frac{C_3}{2}L + C_4\right) + a\left(\frac{C_5}{2}(2L-a) + C_6\right)\end{array}\right]$$

$$= \frac{qL^4}{24EI}\left[\frac{1}{5} - 2\left(\frac{a}{L}\right) + 6\left(\frac{a}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{L}\right)^3 - 2\left(\frac{a}{L}\right)^4\right] = \min$$

Das folgende Diagramm vereinigt die mittlere Durchbiegung in Abhängigkeit von der normierten Lagerposition *a/L* sowie die zugehörige Ableitung dieser Kurve:

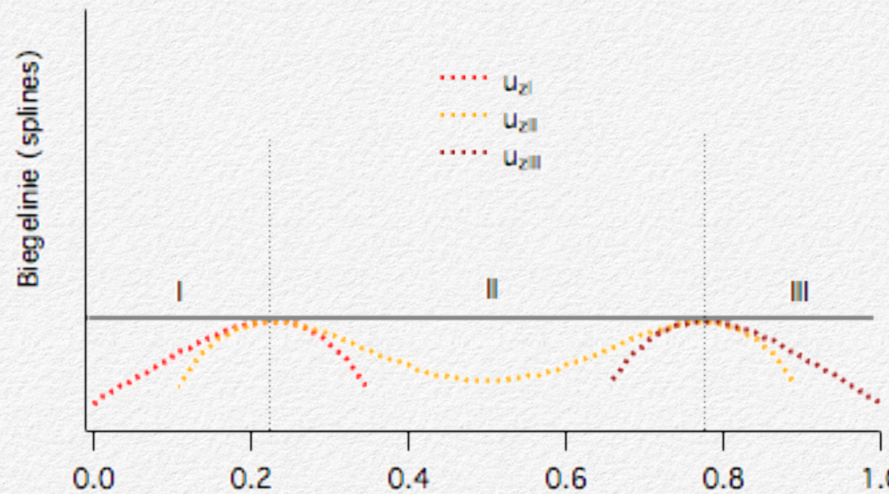


Die Bedingung für einen Extremwert entspricht der Gleichung:

$$\left[1 - 6\left(\frac{a}{L}\right) + 6\left(\frac{a}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{a}{L}\right)^3\right] = 0$$

Das Minimum liegt bei *a/L*= $\sqrt{6}/2 - 1 \approx$ *0.224745*.

Die Biegelinie bei optimaler Lagerung zeigt die folgende Abbildung:



Die mittlere Durchbiegung ist in diesem Fall um den Faktor 65.3 mal kleiner als der entsprechende Wert bei Lagerung an den Enden des Biegeträgers.

<u>Beachten Sie:</u>

- Die horizontale, graue Linie kennzeichnet den unverformten Biegeträger, die senkrechten, gepunkteten Linien markieren die Positionen der Lager.

- Die verschieden farbigen Teillösungen (Splines) sind nur innerhalb ihrer Bereiche (rot: I, orange: II, rotbraun: III) gültig; an deren Rändern (Lager) sind sie stetig differenzierbar zusammengefügt. Zur Verdeutlichung der Unterschiede zwischen den Splines sind die Kurven teilweise in die Nachbarbereiche extrapoliert.
- Interessanterweise kommt man zum gleichen Ergebnis, wenn für den Normalspannungsanteil der Formänderungsenergie ein Minimum vorausgesetzt wird.

Hinweis: Eine historische Bezeichnung der im vorliegenden Abschnitt berechneten, optimalen Lagerpositionen nach Friedrich Wilhelm Bessel lässt sich durch den Autor dieses Buchs nicht belegen.

- In Normen der Längenmesstechnik werden Bessel-Punkte als Auflagepunkte definiert, welche die Verkürzung

$$\Delta L = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{du_z}{dx}\right)^2 dx$$

  eines gebogenen Lineals in der Messebene minimieren. Die entsprechende Lösung unterscheidet sich vom aktuellen Resultat einer minimalen, mittleren Durchbiegung.

Die Sprache der Mathematik ist international, womit auch zu vermuten ist, dass Fragen der Technischen Mechanik in verschiedenen Kulturkreisen kongruent erfasst werden.
Schwierigkeiten der interkulturellen Kommunikation bei der Beschreibung oder Erfassung von Aufgabenstellungen des Fachs verdeutlicht aber folgende Anekdote:
Der dritte Streich der Lausbuben Max und Moritz aus der Bildergeschichte des Dichters und Zeichners Wilhelm Busch, in dem jene einen Steg vor dem Haus des Schneidermeisters Böck ansägten und diesen dann auf den brüchigen Übergang lockten, dürfte jedem deutschen Studenten bekannt sein und bietet damit einen guten Anlass, das Versagen des Stegs in Übungen zur Technischen Mechanik theoretisch nachzuvollziehen.
In meinen Seminaren bezeichnete ich diese Aufgabe als „Meister-Böck-Problem“, was etwa 14 Tage später eine fleißige, chinesische Studentin zu einer Nachfrage veranlasste - sie habe in der Fachliteratur vergeblich nach dem Terminus technicus gesucht.
Die originale Literaturstelle konnte ich ihr schnell zur Verfügung stellen, bereichert um die Erkenntnis, dass naturwissenschaftliche Formeln zwar universell sind, die Formulierung des zugehörigen Sachverhalts aber nicht immer eindeutig ist.