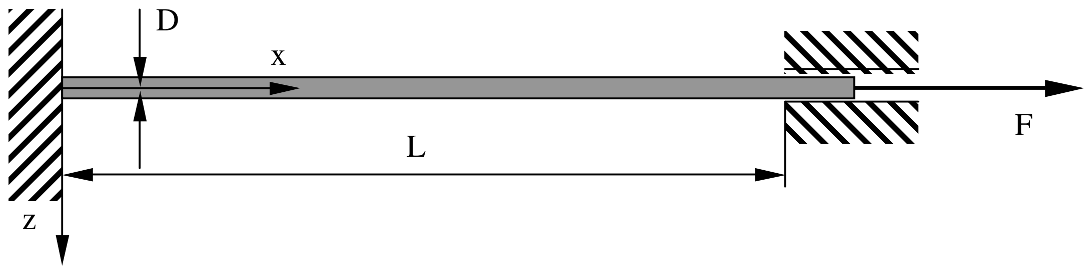


Die Schwingungen einer (biegeschlaffen) Saite werden durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben:

$$\rho A \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \qquad \text{Querschnitt} \qquad A = \frac{\pi}{4} D^2$$

$u_z(x,t)$ ist die lokale, aktuelle Auslenkung senkrecht zur Längsachse *x* der Saite.

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen:

$$u_z(0,t) = 0 \qquad u_z(l,t) = 0$$

ergibt sich folgende Lösung zur Eigenschwingung mit dem Index j:

$$u_z(x,t) = C_j \cos(\omega_j t - \alpha_j) \sin\left(j\pi \frac{x}{L} \right)$$

Die zugehörige Eigenkreisfrequenz hat den Wert:

$$\omega_j = \frac{\pi j}{L} \sqrt{\frac{F}{\rho A}} \tag{1}$$

Erst die Beachtung einer geringen, aber nachweisbaren Biegesteifigkeit der Saite garantiert über zusätzliche Randbedingungen:

$$\left.\frac{\partial u_z}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial u_z}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$$

die konkreten Gegebenheiten der skizzierten Einspannung. Die modifizierte Schwingungsgleichung lautet:

$$\rho A \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - EI \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4}$$

E Elastizitätsmodul

$I = \frac{\pi}{64} D^4$ axiales Flächenmoment 2. Ordnung

Die Eigenschwingform zum Index j hat in diesem Fall die Struktur:

$$u_{z\,j}(x,t)=C_j\cos(\omega_j t-\alpha_j)\Big[\ \cosh\lambda_1 x-\cos\lambda_2 x+$$
$$\frac{\cosh\lambda_1 L-\cos\lambda_2 L}{\lambda_2\sinh\lambda_1 L-\lambda_1\sin\lambda_2 L}(\lambda_1\sin\lambda_2 x-\lambda_2\sinh\lambda_1 x)\ \Big]$$

mit der Eigenkreisfrequenz:

$$\omega_j=\kappa_j^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{2}$$

Die zugehörigen, diskreten Eigenwerte κ zum Index *j* entsprechen den Nullstellen einer charakteristischen Gleichung, welche sich aus der Gesamtheit aller Randbedingungen des skizzierten Systems ableitet:

$$g(F,\kappa)\equiv\cosh\lambda_1 L\cos\lambda_2 L+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\sinh\lambda_1 L\sin\lambda_2 L-1=0 \tag{3}$$

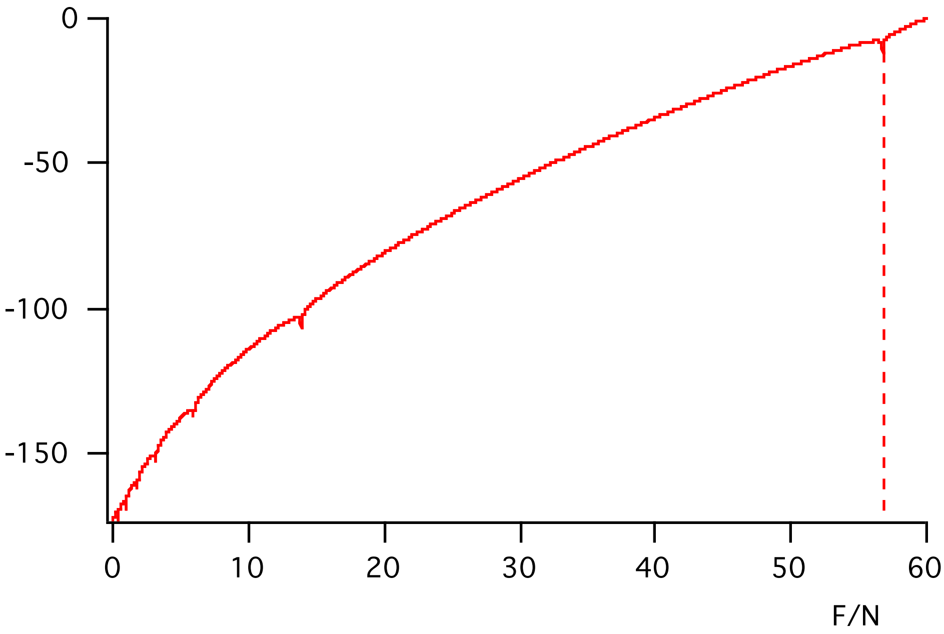
Will, Lämmel, Kleine Formelsammlung Technische Mechanik, Fachbuchverlag Leipzig, 3. Auflage, 2004, S. 167-168

Die einzelnen Parameter stehen für folgende Ausdrücke:

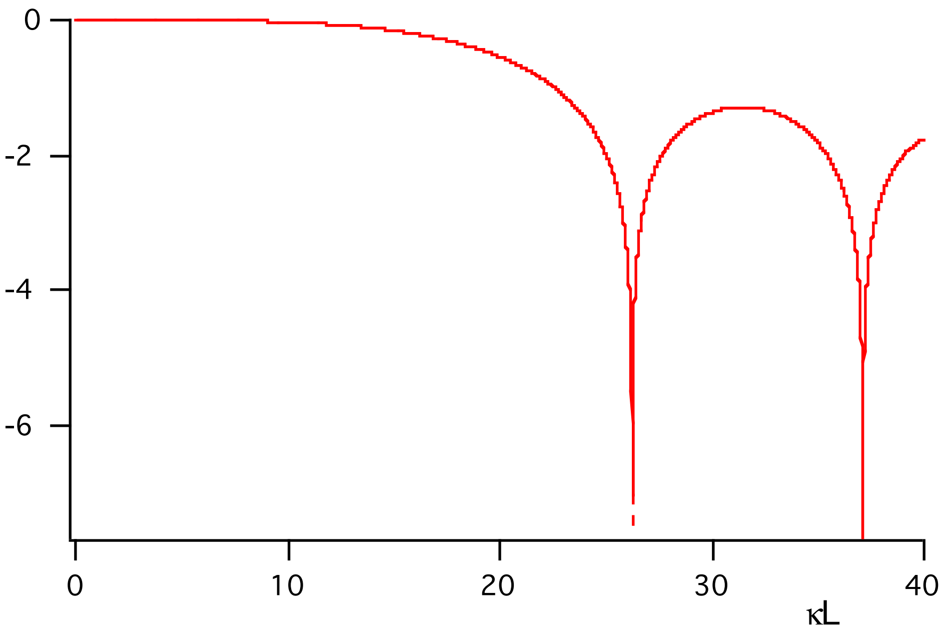
$$\lambda_1=\kappa\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}$$
$$\lambda_2=\kappa\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}$$

$$p=\frac{F}{2EI\kappa^2}$$

Die Spannkraft *F* zur vorgegebenen Eigenfrequenz *f=220 Hz* in der ersten Eigenschwingung unterscheidet sich leicht in den Modellen einer biegeschlaffen bzw. biegesteifen Saite. Im ersten Fall ergibt sich für die Parameter der Anordnung ein Wert *F=57.8 N* unmittelbar aus der Beziehung (1); im zweiten Fall ist die transzendente Gleichung (3) in Abhängigkeit von der Variablen *F* zu lösen, wobei gemäß der Relation (2) ein fester Eigenwert $\kappa=26.235/L$ vorausgesetzt wird. Die numerische Analyse des Problems zeigt, dass verschiedene Werte *F* die Bedingung (3) bei einer vorgegebenen Kenngröße κ erfüllen.
Die entsprechenden Resultate sind in der folgenden Grafik, welche den mathematischen Zusammenhang zwischen $\log\left(g^2(F,\kappa)\right)$ und der Variablen *F* widerspiegelt, in der Form von Einkerbungen des normierten Kurvenzugs verdeutlicht. Die spezielle Darstellung einer logarithmisch skalierten Ordinate wurde gewählt, um einen breiten Bereich aller Daten innerhalb eines Diagramms wiedergeben zu können.



Der markierte Wert *F=56.7456 N* liegt nahe der Vorspannkraft, die sich aus dem Modell der biegeschlaffen Saite ergibt. Alle darunter liegenden Ergebnisse entsprechen möglichen Spannkräften bei Eigenschwingformen höherer Ordnung *(j>1)*.
Dass die ausgewählte Kraft eine Eigenschwingung erster Ordnung darstellt, zeigt das folgende Diagramm, welches die Lage der ersten, beiden Nullstellen von Gleichung (3) bei einem fixierten Parameter *F=56.7 N* erkennen lässt.



Auch in diesem Fall charakterisiert die Ordinate die normierten Daten $\log\left(g^2(F,\kappa)\right)$, diesmal jedoch in Abhängigkeit von der Variablen κL auf der Abszisse.
Der erste Eigenwert liegt bei:

$$\kappa_1 = 26.2350\,/\,L$$

was einer Eigenfrequenz $f_1 = 220\ Hz$ entspricht.