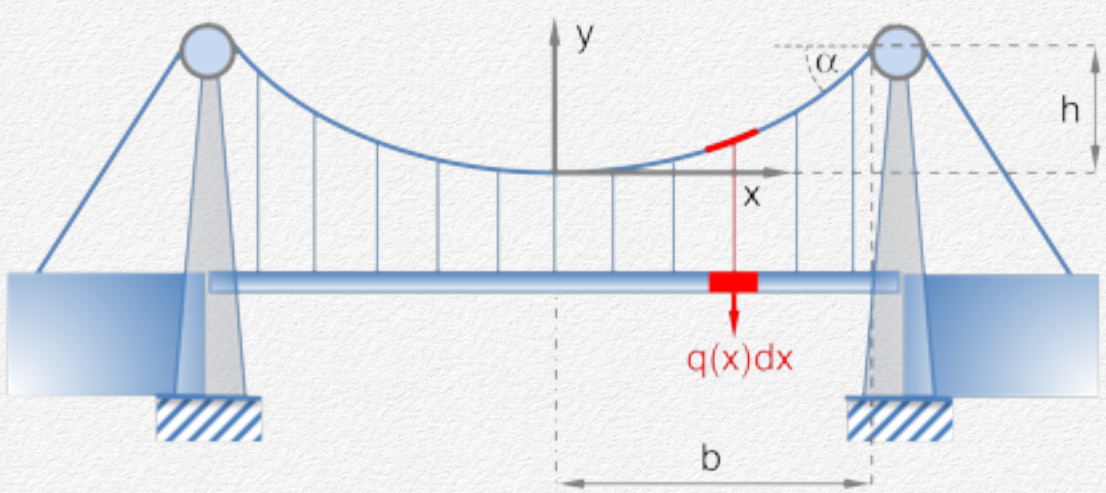
Seilstatik, Stützlinien

Neben dem Terminus Schwerpunkt, der sich direkt aus Bilanzen an parallelen Kräftesystemen ableitet, und der in späteren Kapiteln erneut aufgegriffen wird, sind auch an Seilen aufgehängte Bauteile oder Konstruktionen den Gesetzmäßigkeiten paralleler Kräftesysteme unterworfen.

Am Beispiel einer Hängebrücke werden entsprechende Gleichgewichtsrelationen vorgestellt und daraus Formeln für die Seilstatik abgeleitet.

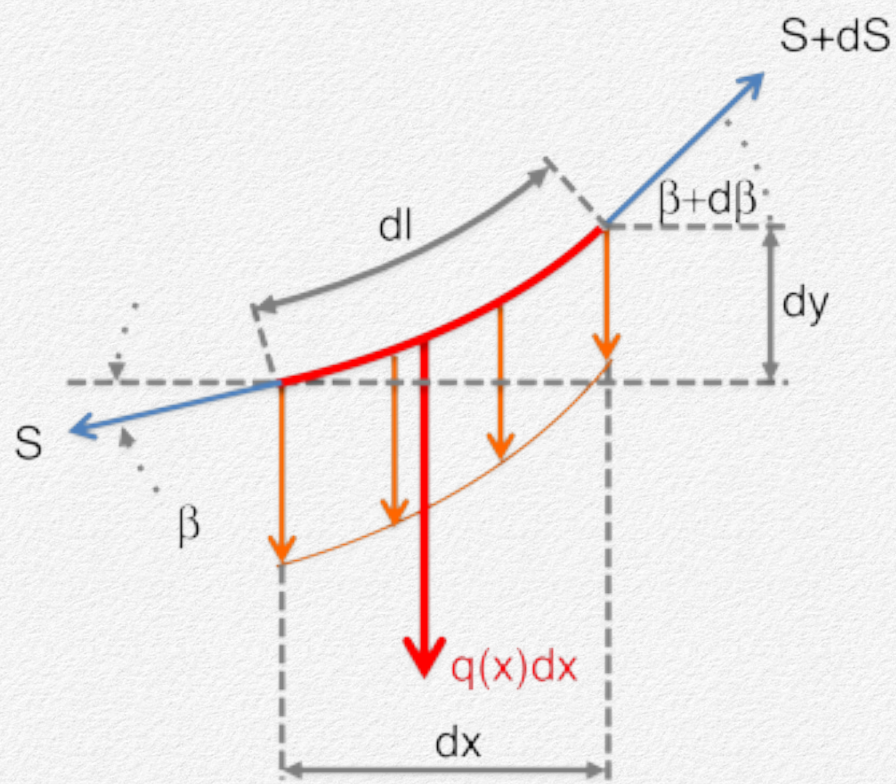


Die Kräftebilanzen am rot markierten Teilstück des Spannseils genügen den Beziehungen (s. folgende Skizze):

$$\rightarrow \quad -S\cos\beta + (S + dS)\cos(\beta + d\beta) = 0$$

$$\uparrow \quad -S\sin\beta - q(x)dx + (S + dS)\sin(\beta + d\beta) = 0$$

Die resultierenden Einzelkraft (rot) zur Linienlast (orange) auf das Seilstück im Bereich dx an der Stelle *x* hat den Wert $q(x)dx$.



Die Schnittkräfte *S* bzw. *S+dS* (blau) stehen für die lokalen Seilkräfte.
Aus den Bilanzen am Seilstück der infinitesimalen Länge:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

folgt unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung $0^2\left(dx, d\beta\right)$:

$$\rightarrow \quad d\left(S\cos\beta\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad S\cos\beta = S_H$$

$$\uparrow \quad d\left(S\sin\beta\right) = q(x)dx \quad \Rightarrow \quad S\sin\beta = \int q(x)dx$$

S_H steht für eine Konstante - den horizontalen Seilzug, die horizontale Komponente aller lokalen Seilkräfte.
Unter Beachtung der geometrischen Beziehung:

$$\frac{dy}{dx} = \tan\beta$$

führt die Kombination beider Gleichungen zu einem Doppelintegral:

$$\tan\beta = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{S_H}\int q(x)dx \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = \frac{1}{S_H}\int\left(\int q(x)dx\right)dx$$

für die Seilkurve *y(x)*.

Die lokalen Seilkräfte berechnen sich gemäß:

$$S(x) = \frac{S_H}{\cos\beta} = S_H\sqrt{1 + \tan^2\beta} = S_H\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Im Sonderfall einer konstanten Linienlast $q(x) = q_o$ lässt sich die zweifache Integration leicht ausführen:

$$y(x) = \frac{1}{S_H}\left(\frac{q_o x^2}{2} + C_1 x + C_2\right)$$

Die Werte der beiden Integrationskonstanten C_1, C_2 folgen aus den Randbedingungen der konkreten Anordnung.
Mit der Wahl des Koordinatenursprungs im Minimum der Seilkurve (Skizze: Hängebrücke) mit horizontaler Tangente:

$$y(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

und unter Beachtung des Durchhangs:

$$y(x = \pm b) = h \quad \Rightarrow \quad S_H = \frac{q_o b^2}{2h} \qquad \text{(horizontaler Seilzug)}$$

ergibt sich im Fall der skizzierten Hängebrücke die Seilkurve:

$$y(x) = \frac{h}{b^2}x^2$$

Die lokalen Seilkräfte nehmen folgende Werte an:

$$S(x) = \frac{q_o b^2}{2h}\sqrt{1 + \left(\frac{2h}{b^2}x\right)^2}$$

Die maximale Seilkraft liegt bei $x=b$:

$$S_{\max} = S(x = \pm b) = \frac{q_o b^2}{2h}\sqrt{1 + \left(\frac{2h}{b}\right)^2}$$

Die Seillänge zwischen $x=0$ und b folgt schließlich aus:

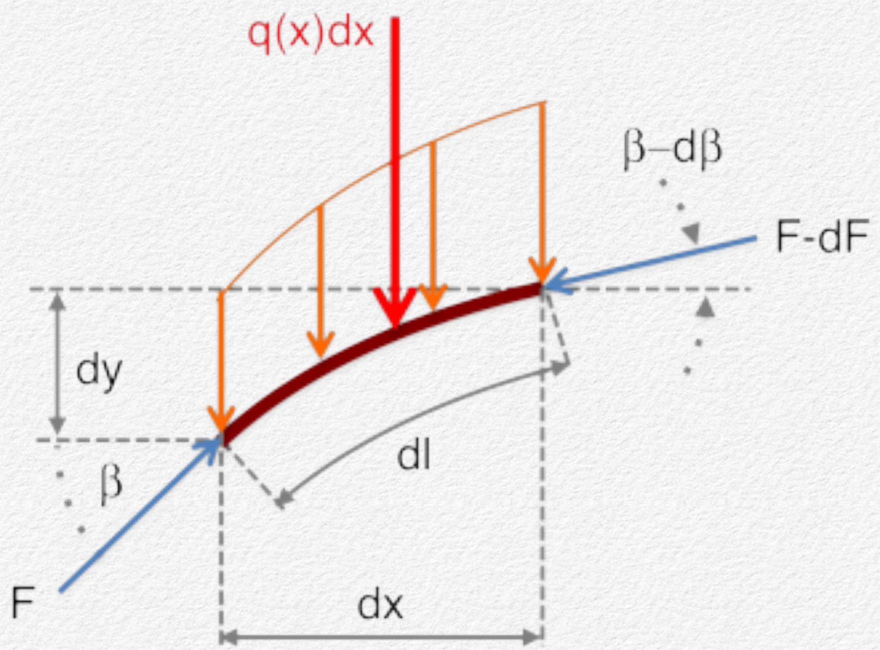
$$l = \int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{b^2}x\right)^2}\,dx = \frac{b}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{2h}{b}\right)^2} + \frac{b}{2h}\ln\left|\frac{2h}{b} + \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{b}\right)^2}\right|\right]$$

<u>Beachten Sie:</u> Unabhängig von Details der Ableitung spezifischer Formeln, die zur skizzierten Anordnung gehören, basieren auch die vorliegenden Analysen - wie bereits alle vorhergehenden, theoretischen Untersuchungen - auf dem Prinzip Freischneiden und Bilanzieren der Schnittgrößen, welches eine grundlegende Vorgehensweise der Technischen Mechanik ist.

Aufgabe 12:

Berechnen Sie den horizontalen Seilzug S_H, die maximale Seilkraft S_{max} sowie die Seillänge l zwischen den Pfeilern der skizzierten Hängebrücke (Spannweite $2b=40m$, Durchhang $h=5m$).
Unter welchem Winkel α zur Horizontalen läuft das Seil am Pfeiler ein?
Das gewichtslose Seil ist durch die Brückenelemente mit einer konstanten Linienkraft $q_o = 1.5kN/m$ belastet.
Wie groß müsste der Durchhang mindestens sein, damit die maximale Seilkraft einen Wert von 50kN nicht überschreitet?

Analoge Überlegungen wie zum Seil gelten für Bogenträger mit einer äußeren Belastung durch parallele Kräfte (orange), bei denen nur Normalkräfte (blau) in der Bogenlinie (rotbraun) wirken sollen, ohne dass zusätzlich lokale Querkräfte oder Momente auftreten.

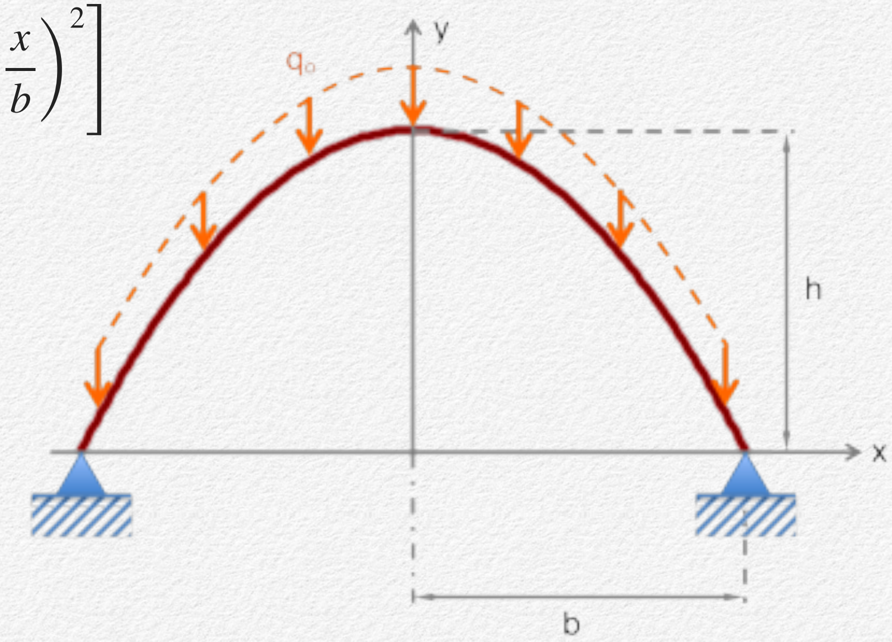


Die entsprechende Gestalt des Trägers, der im Innern ausschließlich auf Druck beansprucht wird, ist durch die sogenannte Stützlinie vorgegeben. Die Vorgabe einer reinen Druckbelastung ist vor allem bei gemauerten Bögen von Vorteil.
Die Zugkräfte im ursprünglichen Modell zum Seil sind in diesem Kontext durch Druckkräfte F zu ersetzen (s. Skizze).
Die Stützlinie entspricht der mathematischen Formel der Seilkurve, allerdings mit einer konstanten, horizontalen Druckkraft F_H anstelle des horizontalen Seilzugs:

$$y(x) = -\frac{1}{F_H}\int\left(\int q(x)dx\right)dx$$

Eine konstante, vertikale Linienlast $q(x) = q_o$ vorausgesetzt, hat die Stützlinie eines symmetrischen Bogenträgers die Form:

$$y(x) = h\left[1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2\right]$$



Die Druckkräfte in der Stützlinie variieren gemäß:

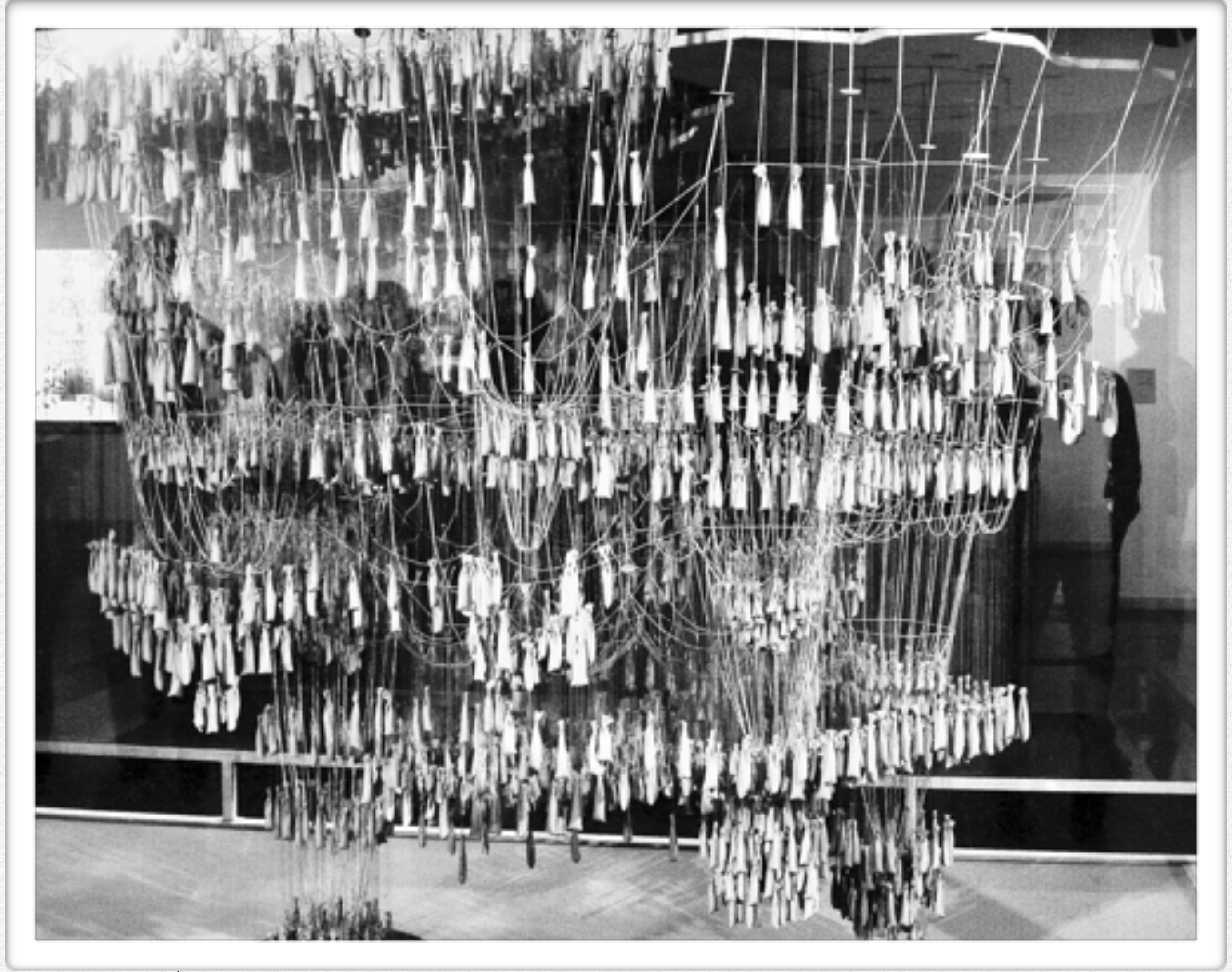
$$F(x) = -\frac{q_o b^2}{2h}\sqrt{1+\left(\frac{2h}{b^2}x\right)^2}$$

Die beiden Lagerkräfte reagieren auf die äußere Belastung mit den horizontalen und vertikalen Komponenten :

$$\left(F_H = \frac{q_o b^2}{2h}, q_o b\right) \quad \text{bzw.} \quad \left(-\frac{q_o b^2}{2h}, q_o b\right)$$

Horizontale Querkräfte, die Bögen in mittelalterlichen-Kirchenschiffen auf hohe, stützende Säulen oder Wände übertragen, müssen durch zusätzliche Strebebögen und -pfeiler an der Außenseite abgefangen werden.

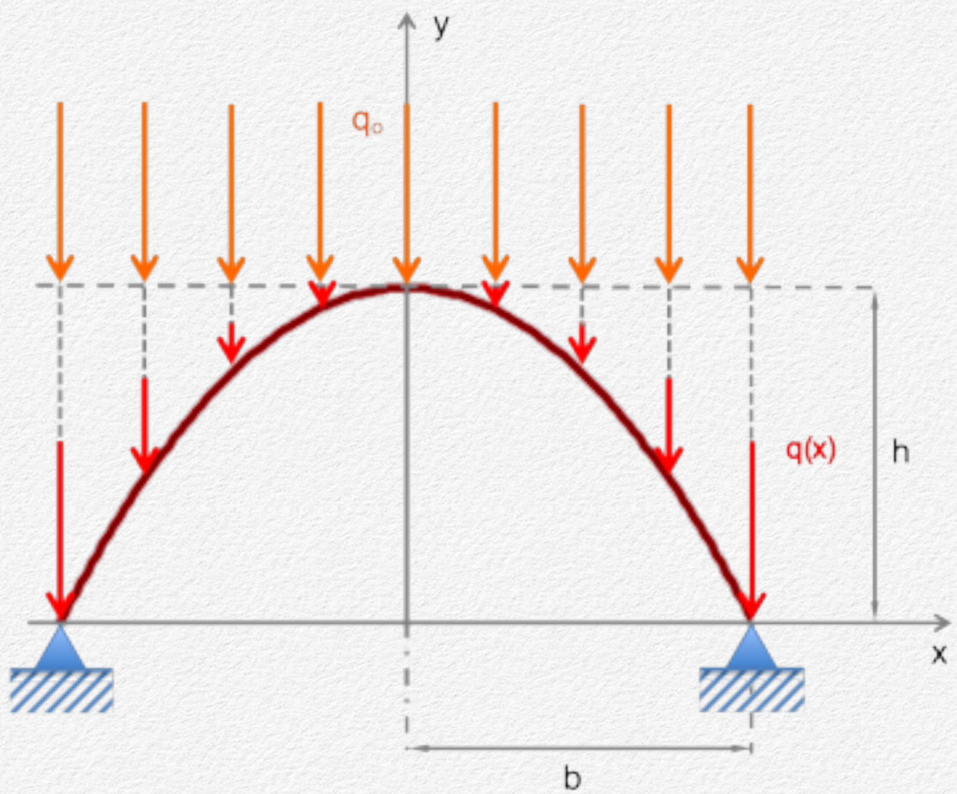
Der Architekt Antonio Gaudi knüpfte in der Entwurfsphase der Basilika Sagrada Familia (Barcelona) Nachbildungen geplanter Gewölbe aus Schnüren und hängte diese Anordnungen kopfüber auf. Das Hängemodell - eine Konstruktionsweise, die nachweislich bereits im 17. Jahrhundert *) bekannt war - unterscheidet sich vom Original durch den Richtungssinn der Belastung. Es wurde genutzt, um experimentell optimale Formen zu finden, die nur auf Druck aber nicht auf Biegung beansprucht sind.



*) *Ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum.*

R. Hooke

Wie sehen in diesem historischen Kontext die Verhältnisse an einer Stützlinie aus, die neben der konstanten Last (orange) des Mauerwerks oberhalb ihres Scheitels auch ein lokal veränderliches Eigengewicht/Länge (rot) des Baustoffs unterhalb tragen muss?



Die rot markierten Belastungen entsprechen dem spezifischen Gewicht des eingesetzten Materials an der Position *x* ; letzteres korreliert linear mit der vertikalen Strecke *h-y(x)* :

$$q(x) = \left(1 - \frac{y(x)}{h}\right) q_+$$

Die Gleichung der Stützlinie nimmt damit folgende Form an:

$$y(x) = -\frac{1}{F_H} \iint \left[q_0 + \left(1 - \frac{y(x)}{h}\right) q_+ \right] dx dx$$

In differentieller Schreibweise lässt sie sich darstellen als:

$$y'' - \frac{q_+}{hF_H} y = -\frac{1}{F_H}(q_0 + q_+)$$

Die Mathematik gibt folgenden Lösungsansatz für diese lineare, inhomogene Differentialgleichung vor:

$$y(x) = Ce^{\kappa x} + h\left(1 + \frac{q_0}{q_+}\right)$$

Das Einsetzen in die Bilanz bewirkt die Kondition:

$$\left(\kappa^2 - \frac{q_+}{hF_H}\right) Ce^{\kappa x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \kappa = \pm \sqrt{\frac{q_+}{hF_H}} \equiv \pm \lambda$$

Die allgemeine Lösung lautet in diesem Zusammenhang:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} + h\left(1 + \frac{q_0}{q_+}\right)$$

Randbedingungen zur Ermittlung der Integrationskonstanten und des Parameters F_H :

$$y\left(\pm b\right) = 0 \qquad\qquad y(0) = h$$

führen schließlich zu einer (abgeflachten), horizontal gespiegelten Kettenlinie:

$$y(x) = h\left[\frac{q_0}{q_+}(1 - \cosh\lambda x) + 1\right] \qquad \text{mit} \qquad \lambda = \frac{1}{b}\operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{q_+}{q_0}\right)$$

Die normierte, konstante, horizontale Komponente der Druckkraft im Bogen hat in Abhängigkeit von den Verhältniszahlen q_+/q_0 und h/b den Wert:

$$\frac{F_H}{q_0 b} = \frac{q_+/q_0}{(h/b)\operatorname{arcosh}^2\left(1 + \frac{q_+}{q_0}\right)}$$

- Bogenbrücken mit aufgeständerter Fahrbahn genügen näherungsweise analogen Relationen mit leicht modifizierten Bedeutungen der Parameter.
- Im Grenzfall $q_0 \gg q_+$ vereinfachen sich die Ergebnisse zu den Formeln der Stützlinie bei konstanter Beanspruchung mit der Last q_0 .
- Eine (klassische), invertierte Kettenlinie (freistehender, selbsttragender Bogen mit konstantem Querschnitt) liegt genau dann vor, wenn gilt:

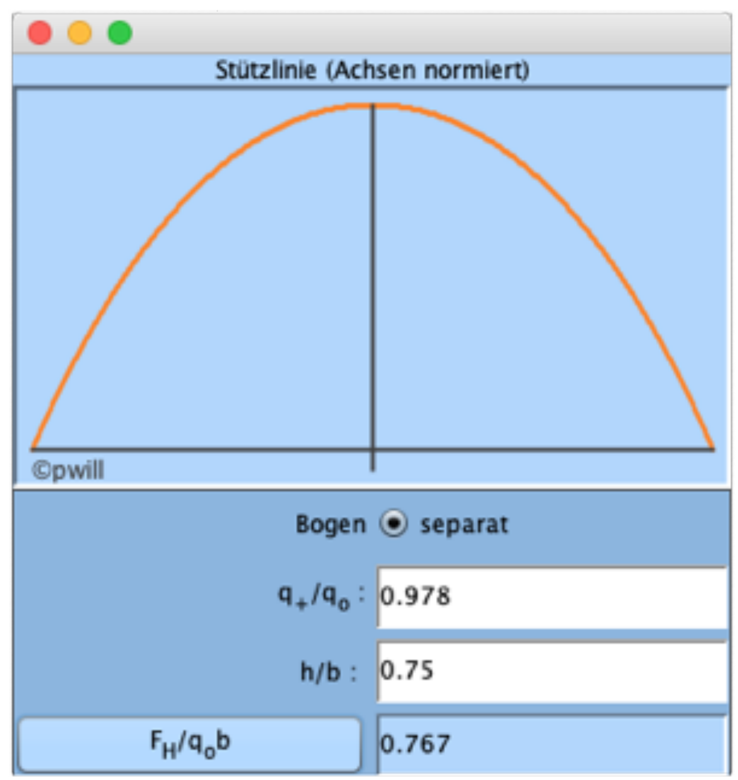
$$\frac{hq_0}{q_+} = \frac{1}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{q_+}{q_0} = \frac{h}{b}\operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{q_+}{q_0}\right)$$

Eine Java-Applikation (s. Screenshot) zur Darstellung von Stützlinien - Voraussetzung ist eine aktuelle Java-Umgebung auf Ihrem Rechner - finden Sie unter:

https://www.me.hs-mittweida.de/index.php?id=pwill_13d

Download: Stützlinie

- Öffnen Sie die hochgeladene JAR-Datei mit der rechten Maustaste.
- Beachten Sie die in der Technik übliche Schreibweise von Dezimalzahlen mit Dezimalpunkt.



Hinweis:
Waagerechte und senkrechte Achse im Diagramm sind jeweils auf Breite bzw. Höhe normiert und damit unterschiedlich skaliert.
Variieren Sie u.U. die horizontale oder vertikale Abmessung des Applikationsfensters, um einen realistischen Eindruck zu bekommen; die Kurve wird dem neuen Rahmen angepasst.

Die meisten Probleme entstehen bei ihrer Lösung.

$$\frac{h}{b} \approx 2$$

$$\frac{q_+}{q_0} \approx 9$$

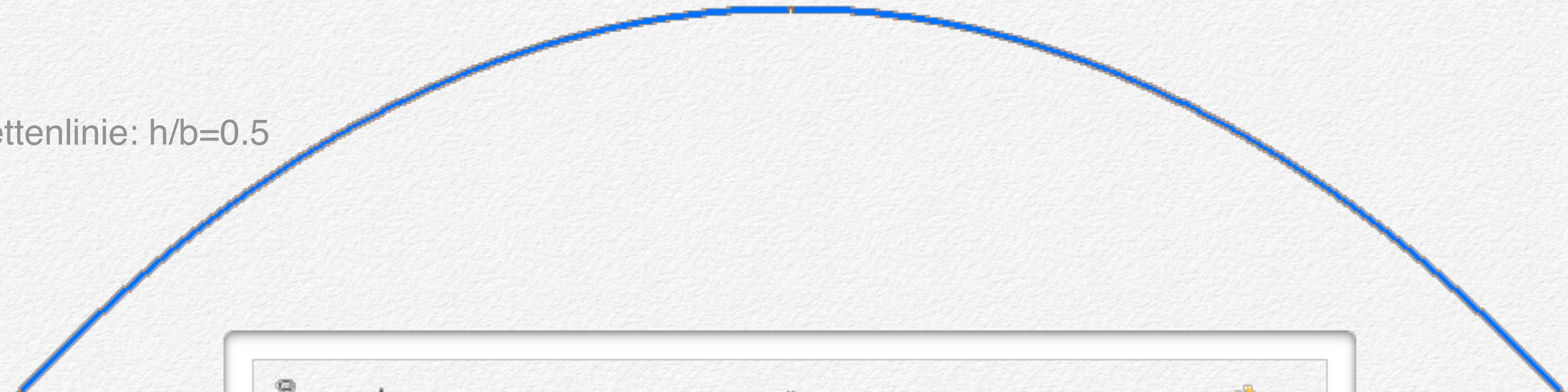
Gateway Arch

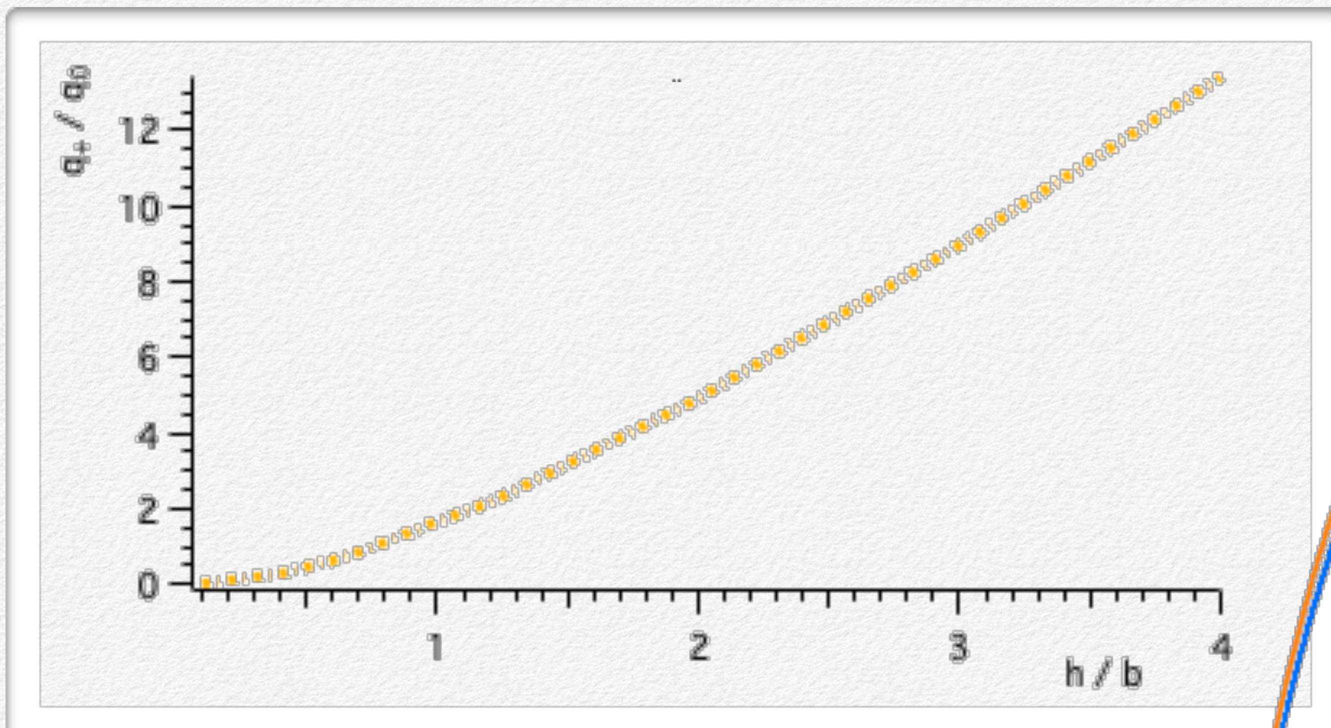
Die vorliegenden Formeln und die zugehörige Applikation modellieren auch selbsttragende Bögen:

Die Centroide (orange) aller Querschnitte des nebenstehend, abgebildeten Monuments in St. Louis bilden gemäß Vorgaben der Baupläne ebenfalls eine abgeflachte, horizontal gespiegelte Kettenlinie, weshalb das Foto zur näherungsweise Anpassung der Parameter (s. links) obiger Kurven an die Gestalt dieses freistehenden Bogens mit dreieckförmigem Querschnittsprofil genutzt wird.

Freistehende, selbsttragende Bögen

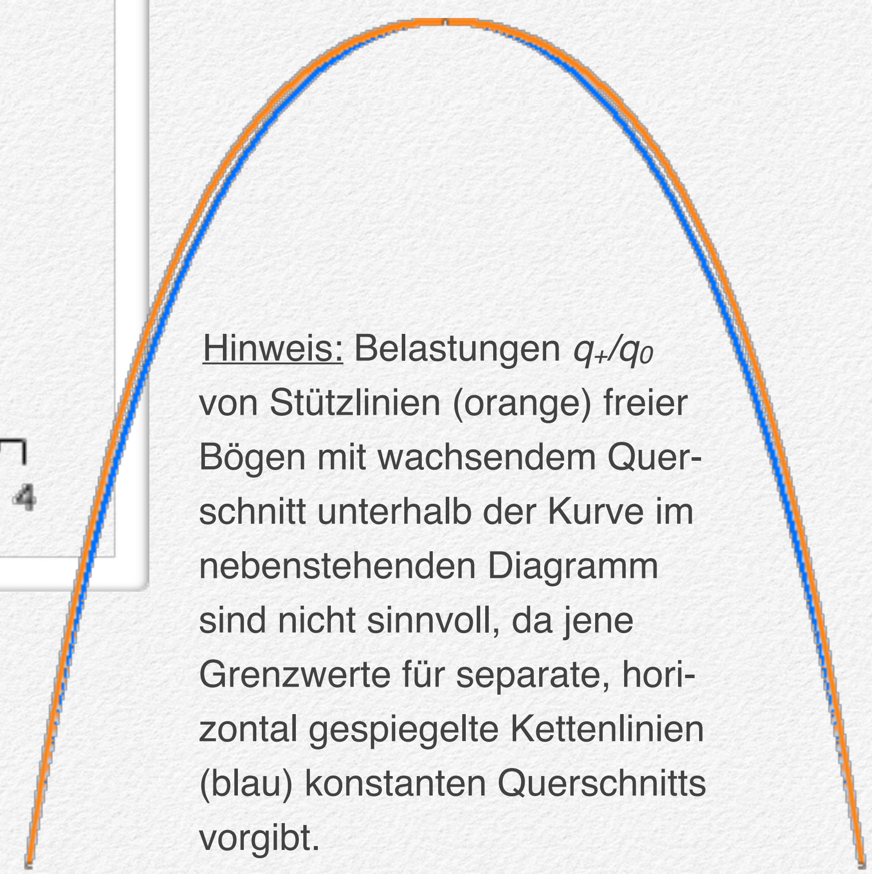
inverse Kettenlinie: h/b=0.5





$$\frac{q_+}{q_0} = \frac{h}{b} ar\cosh\left(1 + \frac{q_+}{q_0}\right)$$

condicio: Kettenkurven

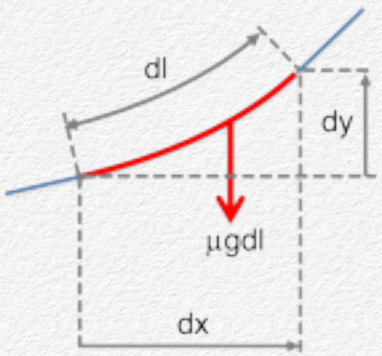


<u>Hinweis:</u> Belastungen q_+/q_0 von Stützlinien (orange) freier Bögen mit wachsendem Querschnitt unterhalb der Kurve im nebenstehenden Diagramm sind nicht sinnvoll, da jene Grenzwerte für separate, horizontal gespiegelte Kettenlinien (blau) konstanten Querschnitts vorgibt.

Katenoide

In Vorgriff auf Kapitel 11 zu energetischen Bilanzen soll die Formel einer (klassischen) Kettenlinie bei Belastung nur mit dem Eigengewicht rekonstruiert werden. Die Gestalt der Kurve, die (horizontal gespiegelt) auch der eines alleinstehenden Bogens mit konstantem Querschnitt entspricht, folgt aus der Annahme einer minimalen potentiellen Energie aller Kettenglieder:

$$E_p = \int_l y(x) g \mu \, dl = \int_{-b}^{b} y(x) g \mu \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$



μ Masse pro Länge

$\pm b$ horizontale Positionen der Aufhängungen

Theorie von Euler-Lagrange:

Extremum eines Funktionals $\int_a^b f(x, y, y')dx$ liegt vor,

wenn gilt: $\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} = 0$

Minimale, potentielle Energie:

$\Rightarrow \quad yy'' - y'^2 - 1 = 0 \qquad$ (#)

Differentation der vorliegenden Relation:

$$yy''' - y'y'' = y^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{y''}{y}\right) = 0 \qquad y^2 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y''}{y} = c = \lambda^2$$

Lösungsansatz:

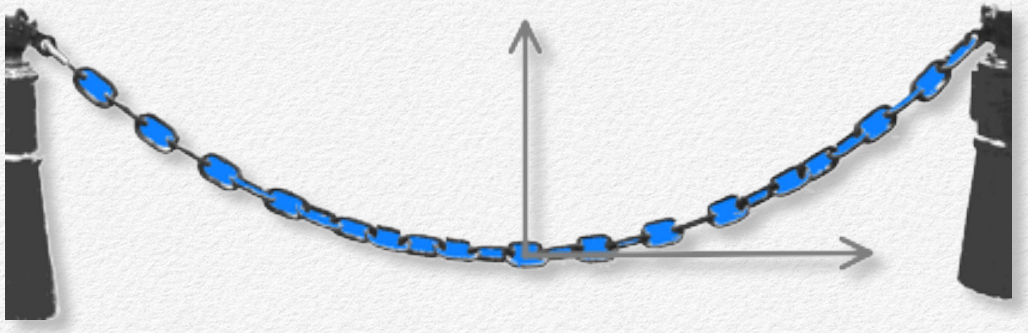
$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$$

Symmetrische Lösung:
(Beachtung der Extremwertbedingung #)

$$y(x) = \frac{1}{\lambda}\cosh(\lambda x)$$

Verschiebung des Nullpunkts auf den Scheitel der Kettenlinie:

$$y(x) = \frac{1}{\lambda}\left[\cosh(\lambda x) - 1\right] \qquad \text{(Katenoide)}$$



Aus dem Vergleich mit den Resultaten zur (abgeflachten), horizontal gespiegelten Kettenkurve folgt:

$$\lambda = \frac{\mu g}{S_H}$$

Separate Konstruktionen wie das Denkmal Gateway Arch werfen die Frage auf, wie die Querschnitte *A(x)* entlang des Bogens mit ihrer Flächennormale jeweils tangential zur Stützlinie variieren müssen, so dass die obigen Formeln auch bei Beanspruchung nur mit der Eigenlast des freistehenden Bauwerks zutreffen.

Das lokale spezifische Gewicht (pro Länge) am Ort ***x*** genügt der Beziehung:

$$q(x) = g\rho A(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ρ Materialdichte
g Schwerebeschleunigung

Die Differentialgleichung der Stützlinie ist damit vom Typ:

$$y'' = -\frac{1}{F_H} g\rho A(x)\sqrt{1+y'^2}$$

Mit der Vorgabe einer abgeflachten, horizontal gespiegelten Kettenkurve:

$$y(x) = h\left[\frac{q_0}{q_+}\left(1-\cosh\lambda x\right)+1\right] \qquad q_0 = g\rho A_0$$

gilt:

$$y' = -\frac{h}{b}\frac{q_0}{q_+}\lambda b \sinh\lambda x \qquad y'' = -\frac{h}{b^2}\frac{q_0}{q_+}\left(\lambda b\right)^2\cosh\lambda x \ .$$

Unter Beachtung von:

$$\frac{F_H}{q_0 b} = \frac{q_+/q_0}{\left(h/b\right)\left(\lambda b\right)^2} \qquad \text{und} \qquad \lambda b = ar\cosh\left(1+\frac{q_+}{q_0}\right)$$

sowie:

$$\cosh^2\lambda x - \sinh^2\lambda x = 1$$

resultiert die Differentialgleichung in der linken Spalte dieser Seite - umgestellt nach dem lokalen Querschnitt - in:

$$A(x) = A_0\frac{\cosh\lambda x}{\sqrt{1+\left(\frac{h}{b}\frac{q_0}{q_+}\lambda b\right)^2\left(\cosh^2\lambda x - 1\right)}}$$

Diese Relation lässt fraglos auch Bögen zu, die sich zu den Auflagern hin verschlanken.

Die Parameter des Monuments führen dagegen zum Wert:

$$\frac{A\left(\pm b\right)}{A_0} = 1.494$$

Die zahlenmäßigen Angaben in den Bauplänen weichen deutlich davon ab. Der Fuß des Bogens müsste schmaler als auf dem Foto sein, um die vorgegebene, angepasste Stützlinie präzise mit dem abgebildeten Bauwerk repräsentieren zu können.

Nicht berücksichtigt in den aktuellen Betrachtungen wurden Verschraubungen zwischen Segmenten der Konstruktion aus bereichsweise unterschiedlichen Verbundwerkstoffen.

Nach den Überlegungen zum Gateway Arch, St. Louis mit denen festgestellt wurde, dass der Parametersatz zur abgeflachten, horizontal gespiegelten Kettenkurve zwar den Korpus beschreibt aber nicht die Stützlinie des Bauwerks abbildet, richtet sich nun der Fokus auf die Analyse idealer, freistehender, selbsttragender Bögen gleicher Festigkeit, um auch für diese Anordnung die Korrelation zwischen Gestalt und Querschnitten zu finden.
Die Normalkräfte innerhalb des Bogens variieren gemäß:

$$F(x) = F_H \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Die lokalen Materialbelastungen entlang der gesamten Stützlinie bleiben a priori unverändert:

$$\frac{F(x)}{A(x)} = \frac{F_H}{A_0} \qquad \Rightarrow \qquad A(x) = A_0\sqrt{1 + y'^2}$$

Die Differentialgleichung der Stützlinie für das Bauteil gleicher Gestaltfestigkeit nimmt in diesem Kontext folgende Form an:

$$y'' = -C\left(1 + y'^2\right) \qquad \text{mit} \qquad C = \frac{1}{F_H} g\rho A_0$$

Mit der Einführung einer Hilfsgröße: $z = y'$ wird folgende Trennung der Variablen möglich:

$$\int \frac{dz}{1 + z^2} = -C\int dx = arc\tan z = -Cx + B \quad \Rightarrow \quad z = \tan(-Cx + B)$$

Die ursprüngliche Ordinate y der Stützkurve berechnet sich daraus gemäß:

$$y(x) = \int z dx = \frac{1}{C}\ln\left[\cos(-Cx + B)\right] + D$$

Die Symmetrie der Anordnung fordert den Wert $B = 0$.
Die Vorgabe von Koordinaten am Scheitel und an den Lagern des Bogens führen zu:

$$x = 0 \qquad y = h \qquad \Rightarrow \qquad D = h$$

$$x = \pm b \qquad y = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{Cb}\ln\left[\cos\left(\pm Cb\right)\right] + \frac{h}{b} = 0$$

h/b	Cb
2	1.5233
1	1.2927
1/2	0.8644

Die letzte Relation kann genutzt werden, um den Wert *Cb* der reziproken, normierten, konstanten, horizontalen Kraftkomponente in Abhängigkeit vom Höhen-Breiten-Verhältnis des linken bzw. rechten Halb-Bogens zu ermitteln.
Die Querschnitte mit ihrer Normale jeweils tangential zur Stützlinie verändern sich folgendermaßen:

$$\frac{A(x)}{A_0} = \sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{\cos\left(Cb\,\frac{x}{b}\right)}$$

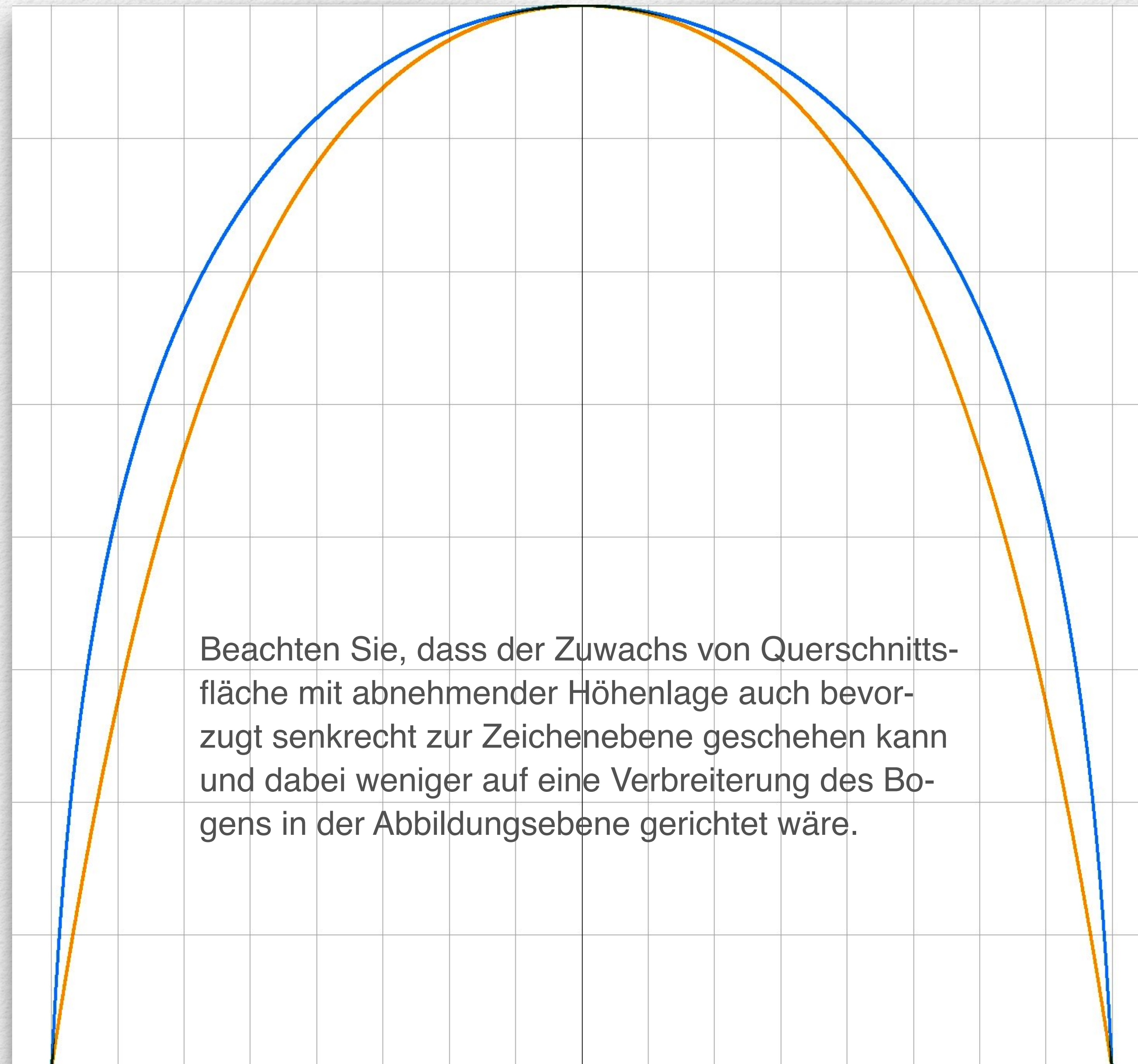
h/b	A(±b)/A₀
2	21.04
1	3.64
1/2	1.54

h/b = 2

Gestalt Gateway Arch

Bogen gleicher Festigkeit

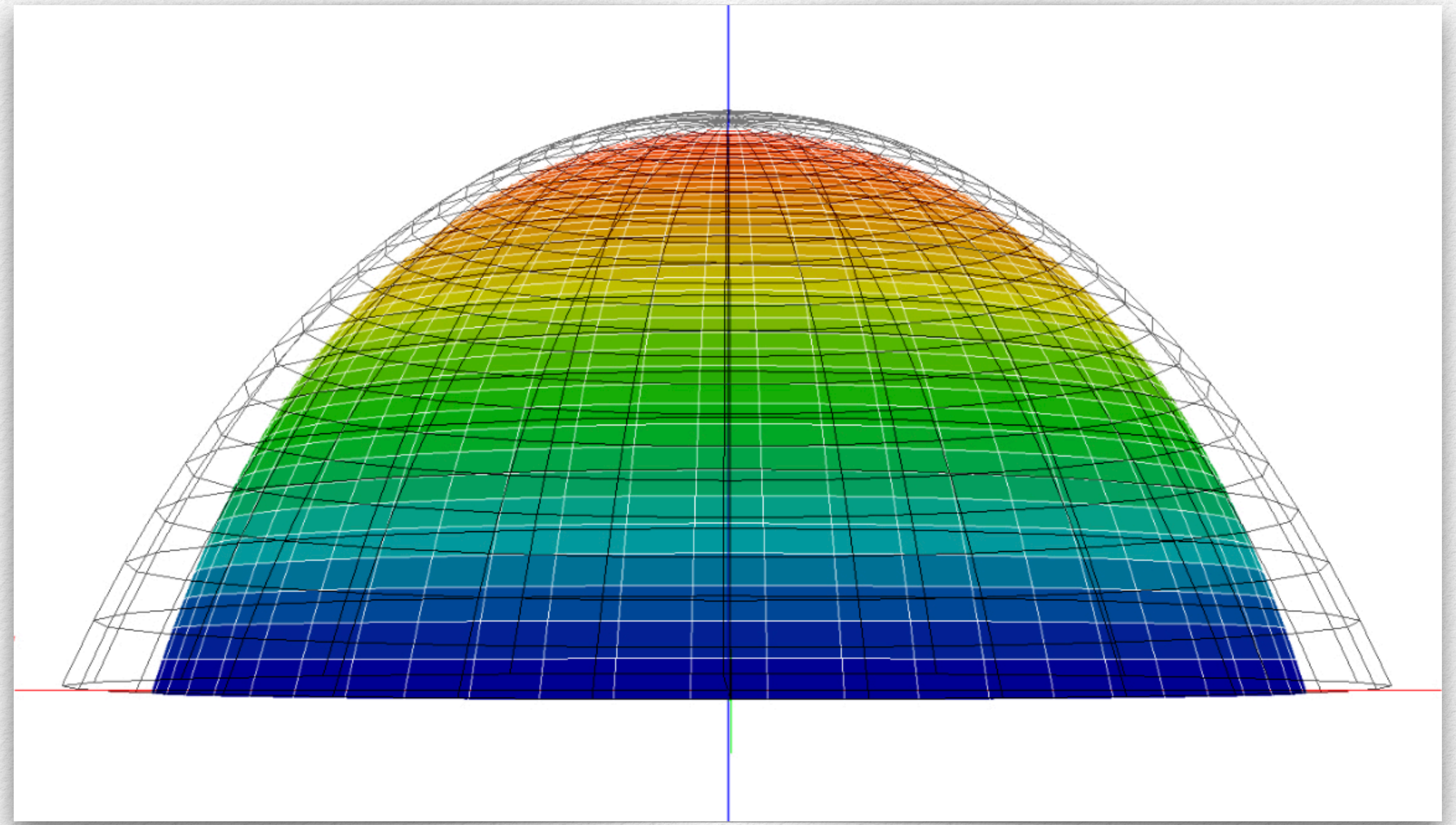
$$\frac{A(y)}{A_0} = \exp\left[\frac{h}{b}Cb\left(1 - \frac{y}{h}\right)\right]$$



Beachten Sie, dass der Zuwachs von Querschnittsfläche mit abnehmender Höhenlage auch bevorzugt senkrecht zur Zeichenebene geschehen kann und dabei weniger auf eine Verbreiterung des Bogens in der Abbildungsebene gerichtet wäre.

$$\frac{y(x)}{h} = \frac{b}{h}\frac{1}{Cb}\ln\left[\cos\left(Cb\frac{x}{b}\right)\right] + 1$$

Kuppel
(Bauteil gleicher Festigkeit)



Centroide aller Querschnitte: farbig
h/b=1