

# Wachstum stochastischer Schäden im inhomogenen Spannungsfeld

P. Will , S. Helbig

Hochschule Mittweida

A pointwise probability density for failure initiation is proposed regarding the evaluation of damaged composite structures. The local cumulative damage measure accounts for both the accumulation of local stochastic microdamaging and the load redistribution to undestroyed subregions. It bases on the global failure rate of heterogeneous composites. Firstly the damage behaviour of beams under load is studied. Secondly it is proved that stress redistribution by a crack tip damage zone yields to the disappearance of singularity dominated stress fields.

## 1. Einleitung

Der vorliegende Artikel beruht auf Fragestellungen, die sich im Zusammenhang mit der werkstoffmechanischen Modellierung geschädigter, heterogener Verbundwerkstoffe ergeben. Spröde Werkstoffe, wie sie vorwiegend in der Mikrosystemtechnik verwendet werden, sowie mehrphasige Komposite mit kleinsten Rissen in der Größenordnung der Materialstruktur sind mit konventionellen, kontinuumsmechanischen Methoden i. Allg. nicht hinreichend zuverlässig bewertbar.

Eine Besonderheit des Rißwachstums sehr kleiner Risse besteht darin, daß der Prozeß der Rißverlängerung im Gebiet der Spannungsüberhöhung an der Rißfront im allgemeinen von nicht-lokalen Schädigungen im Werkstoff begleitet wird. Die Materialveränderungen, die ihre Ursache in der stochastischen Heterogenität (Mikrostruktur) des Werkstoffs haben, verbrauchen Energie, entlasten den Hauptriß und schirmen ihn ab. Es kommt zu nichtlinearen Umlagerungen der Spannungsverteilung im Schadensbereich; das Rißwiderstandsverhalten derartiger Werkstoffe wird wesentlich durch den Grad der nichtlokalen Schädigungen an der Rißfront beeinflusst.

Basierend auf dem Begriff der Ausfallratefunktion [1,2] wurde von den Autoren in der Vergangenheit der Vorschlag für ein Schadensmaß [3] abgeleitet, das ermöglicht das lokale, stochastische Versagensverhalten von Kompositen im inhomogenen Spannungsfeld zu modellieren. Untersuchungen zu lokalen, Spannungsumverteilungen im geschädigten Bauteil bzw. an der Rißfront sehr kleiner Risse auf der Basis dieses lokalen, kumulativen Schadensmaßes sollen im vorliegenden Artikel diskutiert werden.

## 2. Lokales, kumuliertes Schadensmaß

Ausgangspunkt für das abzuleitende Modell ist die globale Ausfallrate für das Bauteilvolumen  $V_0$  in Abhängigkeit von der äußeren Belastung (Kräfte, Momente oder Nominalspannungen, dargestellt durch das Symbol  $Q$  ).

Die globale Ausfallrate  $\Lambda$  ist mit der Versagenswahrscheinlichkeit  $F(Q, V_0)$  des Volumens und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(Q, V_0) = \frac{d}{dQ} F(Q, V_0) \quad (1)$$

über folgende Beziehung verknüpft:

$$\Lambda(Q, V_0) = \frac{f(Q, V_0)}{1 - F(Q, V_0)} \quad (2)$$

Die globale Ausfallrate  $\Lambda$ , die ein wichtiges Instrument der Zuverlässigkeitstheorie darstellt, charakterisiert in der Kombination  $\Lambda(Q, V_0)dQ$  die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Versagen des Bauteils bei einer inkrementellen Zunahme der äußeren Belastung von  $Q$  auf den Wert  $Q+dQ$  unter der Bedingung, daß bis zur Belastung  $Q$  kein Versagen auftritt. Die globale Ausfallrate  $\Lambda$  bewertet also den Grad der Schädigung bei der Belastung  $Q$ .

Wegen der heterogenen Struktur der Verbunde sind partielle, lokale Schädigungen des Bauteils möglich, ohne daß das gesamte Werkstück mit dem Ausfall eines Strukturelementes versagt. Die globale Ausfallrate ist im Gegensatz zur Versagenswahrscheinlichkeit  $F(Q, V_0)$  eine additive Funktion bzgl. der Teilvolumina des Bauteils; es gilt:

$$\Lambda(Q, V_0) = \iiint_{V_0} \lambda(x, y, z, Q) dV \quad (3)$$

mit der lokalen Ausfallrate  $\lambda$ . Diese Eigenschaft der globalen Ausfallrate war der Grund dafür, sie und nicht etwa die Versagenswahrscheinlichkeit zur Basis für die Ableitung eines lokalen Schadensmaßes zu machen.

Ein Maß für die Abweichung der lokalen Ausfallrate gegenüber Gleichverteilung im Volumen  $V_0$  wäre das Verhältnis:

$$w(x, y, z, Q) = \frac{\lambda(x, y, z, Q)}{\frac{1}{V_0} \Lambda(Q, V_0)} \quad (4)$$

Die Funktion  $w(x, y, z, Q)$  gibt in Abhängigkeit vom Belastungsniveau  $Q$  an, wieviel mal größer bzw. kleiner die tatsächliche lokale Ausfallrate im Punkt  $(x, y, z)$  gegenüber einer gemittelten lokalen Ausfallrate ist, die über das gesamte Volumen gleichverteilt wäre. Aus dieser Interpretation läßt sich der Vorschlag für ein lokales, kumuliertes Schadensmaß in Abhängigkeit von der Betriebsbelastung  $Q$  ableiten:

$$D(x, y, z, Q) = \int_0^Q f(Q^*, V_0) w(x, y, z, Q^*) dQ^* \quad (5)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichten  $f(Q^*, V_0)$  werden bis zur Betriebslast  $Q$  aufsummiert. Die Wichtung der Wahrscheinlichkeitsdichten erfolgt dabei mit dem Faktor  $w(x, y, z, Q^*)$ , welcher bei einer äußeren Last  $Q^*$  dem Verhältnis zwischen den vom Punkt  $(x, y, z)$  eingebrachten An-

teil der lokalen Ausfallrate zur mittleren lokalen Ausfallrate des Bauteils entspricht. Im Grenzfall eines homogenen Spannungsfeldes, welches durch den Wert  $w=1$  im gesamten Volumen gekennzeichnet ist, sind lokales, kumuliertes Versagensmaß  $D$  und Versagenswahrscheinlichkeit  $F$  der Probe äquivalent.

Unter Berücksichtigung der Definition (2) für die globale Ausfallrate  $\Lambda$  und dem Ausdruck (4) für den Wichtungsfaktor  $w$  ergibt sich für das lokale Schadensmaß schließlich folgende Beziehung:

$$D(x,y,z,Q) = V_0 \int_0^Q R(Q^*, V_0) \lambda(x,y,z,Q^*) dQ^* \quad (6)$$

Die Funktion

$$R(Q, V_0) = 1 - F(Q, V_0)$$

charakterisiert die Zuverlässigkeit der gesamten Probe mit dem Volumen  $V_0$ .

Der Integrand inklusive Faktor  $V_0$  vor dem Integral kann als Zuverlässigkeit des Bauteilvolumens  $V_0$  bis zur Belastung  $Q^*$  interpretiert werden, wobei eine zusätzliche inkrementelle Steigerung der Belastung um den Wert  $dQ^*$  das Strukturelement im Punkt  $(x,y,z)$  ausfallen läßt, ohne daß es bisher versagt hatte. Damit hat der vorliegende Ausdruck die Bedeutung, die von einem lokalen, kumulierten Schadensmaß gefordert wird.

### 3. Weibullverteilung

Um die vorliegenden Überlegungen zu konkretisieren, wird für die Teilvolumina, die in ihrer Gesamtheit das Werkstück mit dem Volumen  $V_0$  bilden, eine 2-parametrische Festigkeitsverteilung (Skalenparameter  $\sigma_0$ , Formparameter  $m$ ) nach Weibull angenommen. Diese Annahme trifft u. a. auf Verbunde zu, die aus spröden Grundwerkstoffen (Keramiken, pulvermetallurgische Legierungen) verstärkt mit spröden Fasern (Glas, Keramik, Kohlenstoff) bestehen.

$$F(Q, V_0) = 1 - \exp \left[ - \frac{1}{V_0} \int \int \int_{V_0} \left( \frac{\sigma(x,y,z,Q)}{\sigma_0} \right)^m dV \right] \quad (7)$$

Die Integration geschieht über den gesamten Probenbereich in den Grenzen des Volumens  $V_0$ .

Die Funktion  $\sigma(x,y,z,Q)$  kennzeichnet das von der äußeren Belastung abhängige, reale, lokale Spannungsfeld der versagensrelevanten Spannung im Bauteil. Einschränkend wird angenommen, daß nur Zugspannungen  $\sigma > 0$  zum Ausfall von Strukturelementen führen können.

Die lokale Ausfallrate nimmt entsprechend (3) folgenden Wert an:

$$\lambda(x,y,z,Q, V_0) = \frac{1}{V_0} \frac{m}{\sigma_0} \left( \frac{\sigma(x,y,z,Q)}{\sigma_0} \right)^{m-1} \frac{\partial}{\partial Q} \sigma(x,y,z,Q) \quad (8)$$

#### 4. Biegeprobe (inhomogene Belastung)

Die Eignung des vorgeschlagenen Schadensmaßes zur Modellierung des Versagensverhaltens von Bauteilen in nichthomogenen Spannungsfeldern soll am Beispiel eines faserverstärkten Balkens unter reiner Biegebelastung (ohne Querkräfte) in Form eines Moments  $Q=M_y$  geprüft werden.

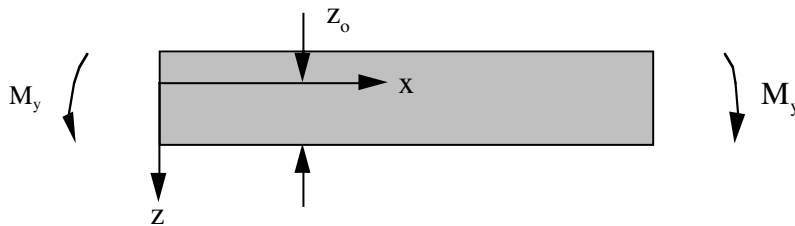


Bild 1: Balken unter reiner Biegebelastung

Die Biegespannung im längs-faserverstärkten Balken ist die entscheidende Versagenskenngröße. Basierend auf der Biegetheorie von Balken mit Schichtstruktur gilt folgender Ansatz für die inhomogene Biegespannung im Balken mit konstantem Querschnitt:

$$\sigma_{xx}(z, M_y) = E(z, M_y) \frac{z}{R(M_y)} \quad (9)$$

Die einzelnen Ausdrücke bedeuten:

$R(M_y)$	Biegeradius
$E(z, M_y)$	Effektivwert des lokalen Elastizitätsmoduls der geschädigten Balkenschicht mit der Koordinate $z$

In Ergänzung zur konventionellen Biegetheorie nach Euler-Bernoulli verringert sich die Steifigkeit des Materials mit zunehmender Last infolge der damit verbundenen Schadensakkumulation. Der lokale, effektive Elastizitätsmodul des geschädigten Werkstoffs verändert sich mit dem lokalen, kumulierten Schadensmaß  $D$ , welches wiederum eine Funktion der äußeren Belastung  $M_y$  inklusive der inneren Lastumverteilung darstellt.

$$E(z, M_y) = E_o [1 - D(z, M_y)] \quad (10)$$

Die Steifigkeit geschädigter Bereiche nimmt wie der Nettoquerschnitt linear mit dem lokalen Schadensmaß ab. Der Parameter  $E_o$  steht für den gemittelten Elastizitätsmodul des ungeschädigten Ausgangsmaterials.

Fehlende Längsbelastung des Balkens vorausgesetzt, lautet die Bedingung für das Kräftegleichgewicht am Balken mit dem Originalquerschnitt  $A_o$

$$\iint_{A_0} \sigma_{xx}(z, M_y) dA = 0 \quad (11)$$

Unter Berücksichtigung der Ansätze (9,10) folgt daraus die Lage der Spannungsnull-Linie (Koordinatenursprung  $z=0$ ), welche die Gebiete mit Druck- bzw. Zugspannungsbelastung im Balkenquerschnitt voneinander trennt.:

$$\iint_{A_0} [1 - D(z, M_y)] z dA = 0 \quad (12)$$

Aus dem Momentengleichgewicht am Balkenquerschnitt ergibt sich der zum Moment  $M_y$  gehörige Biegeradius; es gilt:

$$\frac{1}{R(M_y)} = \frac{M_y}{\iint_{A_0} E(z, M_y) z^2 dA} \quad (13)$$

Die reale Nettobiegespannung im Balken berechnet sich demnach gemäß:

$$\sigma_{xx}(z, M_y) = \frac{(1 - D(z, M_y)) M_y z}{I_{yy}(M_y)} \quad (14)$$

mit dem modifizierten, effektiven Flächenmoment 2. Ordnung

$$I_{yy}(M_y) = \iint_{A_0} [1 - D(z, M_y)] z^2 dA \quad (15)$$

Die abgeleitete Beziehung (14) besitzt die Struktur einer Integralgleichung, da sowohl das Schadensmaß  $D$  als auch die Lage der neutralen Faser  $z=0$  im Balkenquerschnitt selbst wieder Funktionen der Biegespannung in Abhängigkeit von der äußeren Belastung  $M_y$  sind.

## 5. Numerische Simulation

Basierend auf Werten einer gemessenen Festigkeitsverteilung (Weibull) von Kohlenstoff-Fasern [2], ergeben sich folgende numerischen Lösungen der genannten Integralgleichung für die auf Biegung beanspruchte Probe.

**Bild 2** kennzeichnet die lokalen, kumulierten Schadensmaße  $D(z, M_y)$  in Abhängigkeit von der äußeren Belastung  $M_y$ .

Das Diagramm zeigt deutlich, daß die Schädigungen von der Unterseite des Balkens  $z=z_0$  am größten sind und mit zunehmender Belastung nach innen wachsen. Bei der Grenzbelastung  $M_y=M_V$  ist der Punkt erreicht, bei welcher der zu erwartende Zuwachs an inneren Schädigungen größer ist als der Anteil der durch eine Lastumverteilung auf nichtgeschädigte Fasern noch kompensiert werden könnte. Die Biegeprobe wird instabil und reißt.

Das modifizierte Flächenmoment 2. Ordnung variiert in Abhängigkeit von der äußeren Belastung mit zunehmender Schädigung und der damit verbundenen Verringerung des Nettoquerschnitts relativ zum Flächenmoment der ungeschädigten Probe gemäß **Bild 3**.

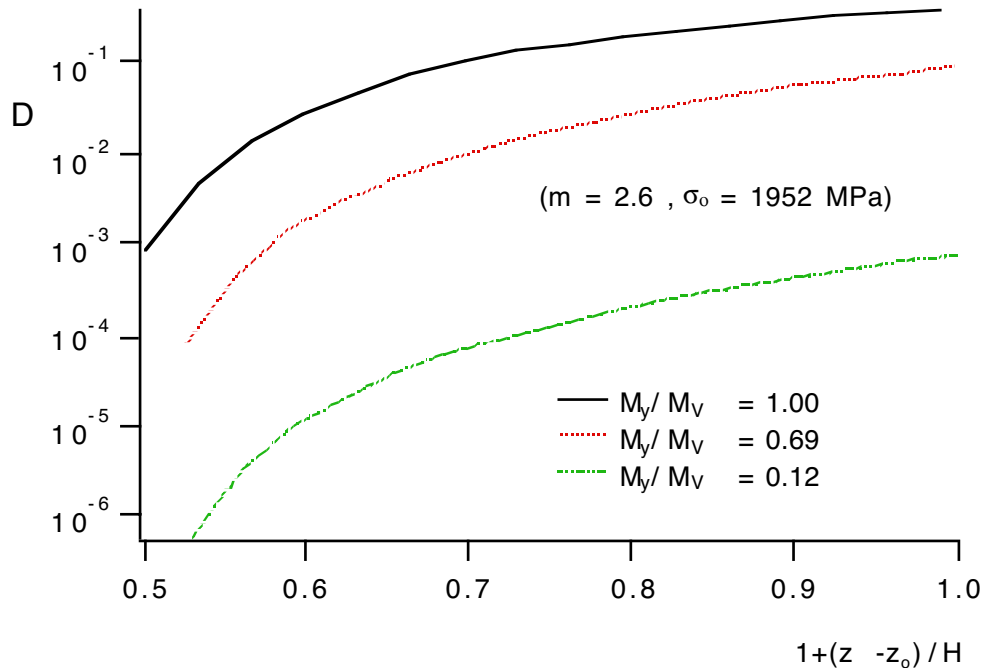


Bild 2: Lokales, kumulatives Schadensmaß

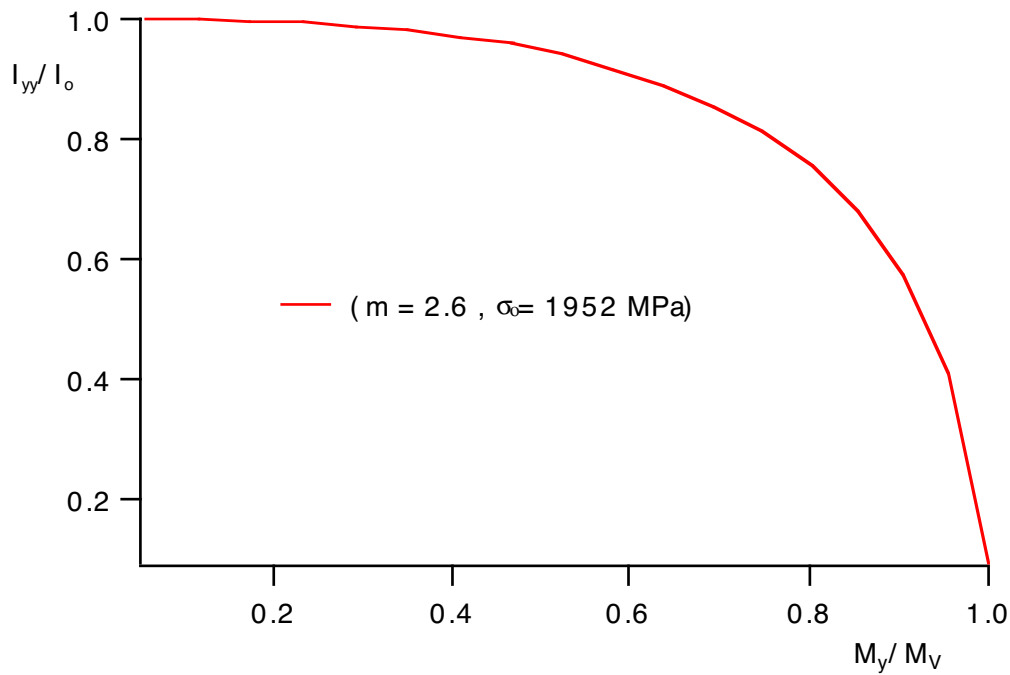


Bild 3: Modifiziertes Flächenmoment 2. Ordnung  
Die anfänglich nur geringen Einflüsse innerer Schäden auf das effektive Flächenmoment des Balkens nehmen nahe der Versagenslast  $M_y=M_V$  rapide zu.

Die Wanderung der neutralen Faser über den Querschnitt, d. h. die Lageänderung der Spannungs-Null-Linie im zunehmend geschädigten Balken ist im **Bild 4** verdeutlicht; die Koordinate  $z_0$  charakterisiert die veränderliche Abmessung des auf Zug beanspruchten Balkenbereichs bei einer Gesamthöhe  $H$  des Bauteils.

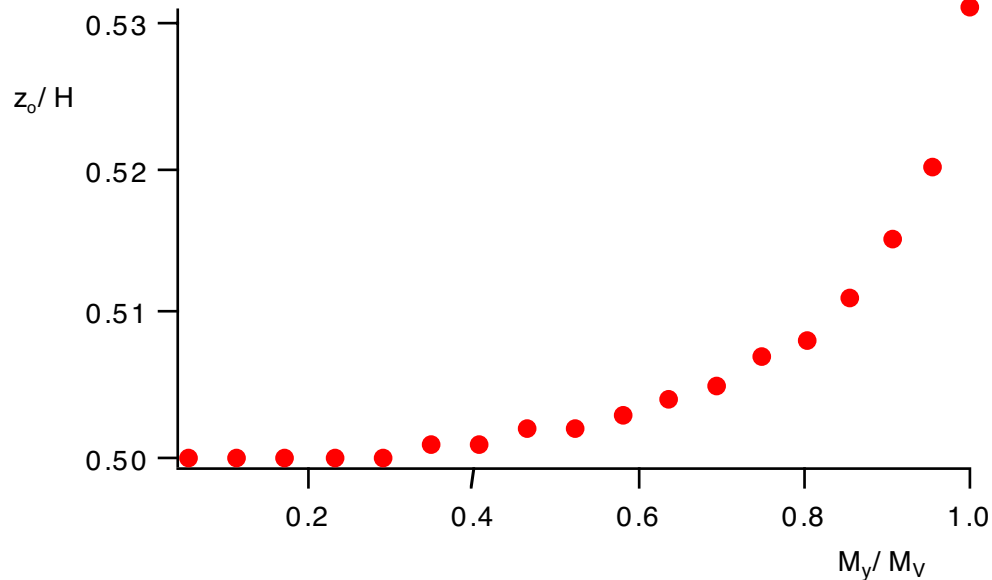


Bild 4: Abmessung des Zugspannungsbereiches, Lage der neutralen Faser

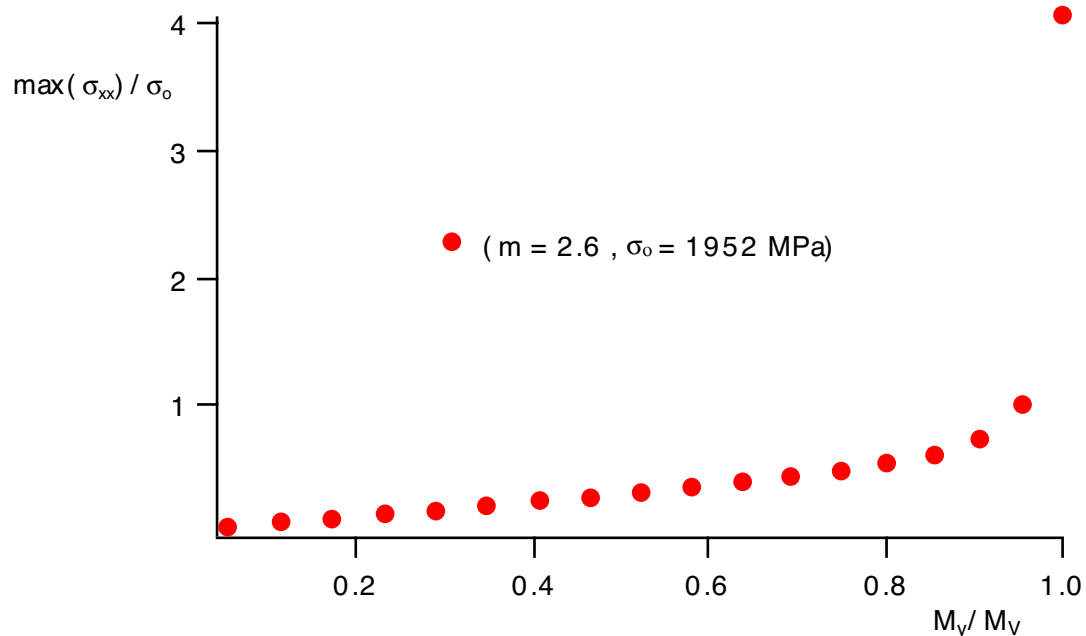


Bild 5: Maximale Biegespannung

**Bild 5** zeigt schließlich, wie die maximale, reale Biegespannung an der Unterseite des Balkens im Verhältnis zum Skalenparameter  $\sigma_0$  der Weibullverteilung mit steigender Beanspruchung über die Reduzierung des Nettoquerschnitts zunimmt und nahe der Grenzlast sehr steil ansteigt.

Die Ergebnisse der numerischen Simulation beschreiben das punktweise aufgeschlüsselte Schädigungsverhalten bis zum Versagen des Werkstücks sehr detailliert; damit liegt der Gedanke nah, das vorgestellte Schadenskonzept als Alternative oder Ergänzung zu klassischen bruchmechanischen Versagensmodellen zu verwenden.

Gerade Strukturen mit kleinsten Rissen in der Größenordnung der Materialstruktur, wie sie in Elektronikwerkstoffen und bei Konstruktionskeramiken auftreten können, sind mit den üblichen kontinuumsmechanischen Methoden der Bruchmechanik nicht hinreichend zuverlässig zu bewerten. Einen Ansatz zur Verbesserung dieser Situation stellt das verallgemeinerte JT<sub>J</sub>-Bruchkonzept [4] eines der Autoren dar, welches den Einfluß einer energiedissipativen Schädigungszone an der Rißfront auf das Rißwachstum berücksichtigt.

Erste Untersuchungen zum lokalen, kumulativen Versagensverhalten an einer einzelnen Rißfront auf der Basis des vorgestellten Schadensparameters sollen im folgenden diskutiert werden.

## 6. Korrigiertes Spannungsnahfeld am Riß

Untersucht wird die Entwicklung eines Rißkeims unter der Wirkung einer sehr kleinen Last  $\Delta\sigma$ . Es wird angenommen, daß sich ein sehr kurzer Riß der relativen Länge  $a(\Delta\sigma)/W \ll 1$  herausbildet. Der Parameter  $W$  kennzeichnet die Probenbreite. Verschiedene Schädigungsorte im Material führen wegen der heterogenen Mikrostruktur zu unterschiedlichen Rißlängen; letztere unterliegen damit einer statistischen Verteilung.

Die Ausbildung des Risses führt zu einer Reduzierung des Probenquerschnitts.

Eine Reihenentwicklung des zu erwartenden, lokalen Schadensparameters am Rißkeim nach der relativen Rißlänge als direkt meßbare Schadenskenngroße führt auf folgenden formalen, mathematischen Zusammenhang:

$$\lim_{r \rightarrow 0} D(r, \phi, \Delta\sigma) = \frac{1}{\alpha(\phi)} \left( \frac{a}{W} \right) \quad (16)$$

Das Symbol  $r$  steht für die Entfernung von der Rißspitze,  $\phi$  kennzeichnet die Orientierung des Aufpunktes zum Riß in der Ebene.

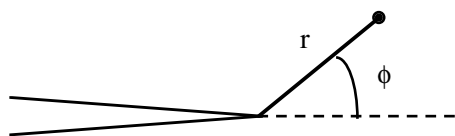


Bild 6: Koordinaten an der Rißfront

Der Wert des Proportionalitätsfaktors  $\alpha$  und damit das lokale Schadensmaß selbst kann sich mit der Orientierung  $\phi$  ändern; in Druckspannungsbereichen treten a priori keine Schädigungen auf.

Das lokale Nahfeld der versagensrelevanten Hauptspannung unmittelbar um die Rißspitze am Ort  $(r, \phi)$  wird üblicherweise [5] beschrieben durch:



$$\sigma = \frac{C\Delta\sigma\sqrt{a/W}}{\sqrt{r/W}} f_1(\phi) = \frac{C\Delta\sigma\sqrt{\alpha D}}{\sqrt{r/W}} f_1(\phi) \quad (17)$$

Der Parameter C berücksichtigt die konkrete Geometrie der Probe.

Nach den Ergebnissen von Abschnitt 2 berechnet sich der lokale, kumulative Schadensparameter an der Rißspitze inklusive Lastumverteilung aus:

$$\lim_{r \rightarrow 0} D(r, \phi, \Delta\sigma) = A_o \Delta\sigma R(\Delta\sigma, A_o) \lim_{r \rightarrow 0} \lambda(r, \phi, \Delta\sigma) \quad (18)$$

Die lokale Ausfallrate  $\lambda$  folgt unter Beachtung des versagensrelevanten Spannungsnahfeldes aus der Beziehung

$$\lambda(r, \phi, \Delta\sigma) = \frac{m}{A_o} \left( \frac{C\Delta\sigma\sqrt{\alpha D}}{\sigma_o \sqrt{r/W}} f_1(\phi) \right)^{m-1} \left[ \frac{C\sqrt{\alpha D}}{\sigma_o \sqrt{r/W}} f_1(\phi) \left( 1 + \frac{1}{2} \Delta\sigma \frac{dD/d\Delta\sigma}{D} \right) \right] \quad (19)$$

Die lokale Ausfallrate ist, wie bereits erwähnt, nur in den Bereichen von Null verschieden, in denen Zugspannungen auftreten ( $f_1(\phi) > 0$ ).

Ersetzt man den Differentialquotienten in der vorliegenden Gleichung näherungsweise durch den Differenzenquotienten,

$$\frac{dD}{d\Delta\sigma} \approx \frac{D}{\Delta\sigma} \quad (20)$$

was für infinitesimal kleine Lasten  $\Delta\sigma$  gerechtfertigt ist, so ergibt sich folgende selbst-konsistente Gleichung zur Ermittlung des aktuellen, lokalen Schadensparameters:

$$D(r, \phi, \Delta\sigma) = \frac{3}{2} R(\Delta\sigma, A_o) m \left[ \frac{C\Delta\sigma\sqrt{\alpha D}}{\sigma_o \sqrt{r/W}} f_1(\phi) \right]^m \quad f_1(\phi) > 0 \quad (21)$$

Der lokale Schadensparameter selbst hat danach an der Rißfront den Wert:

$$D = \left[ \frac{3}{2} m R(\Delta\sigma, A_o) \left( \frac{C\Delta\sigma\sqrt{\alpha}}{\sigma_o \sqrt{r/W}} f_1(\phi) \right)^m \right]^{\frac{2}{2-m}} \quad f_1(\phi) > 0 \quad (22)$$

Das ursprünglich singular dominierte Spannungsnahfeld um die Rißspitze ändert sich damit unter Berücksichtigung der Lastumverteilung auf ungeschädigte Volumenelemente in der unmittelbaren Umgebung der Rißfront.

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \left\{ \frac{3}{2} mR(\Delta\sigma, A_0) \right\}^{\frac{1}{2-m}} \left[ \frac{\sigma_0 \sqrt{r/W}}{C\Delta\sigma \sqrt{\alpha} f_1(\phi)} \right]^{m-2} \quad (23)$$

Das Resultat zeigt, daß es zu nichtlinearen Umlagerungen der Spannungsverteilung in der Schadenszone unmittelbar um die Rißfront kommt; das Rißwachstum ist durch ein unterkritisches Verhalten geprägt.

Die Spannungssingularität vom Typ  $r^{-1/2}$  am Riß im ungeschädigten Material verschwindet in schadensrelevanten Zugspannungsbereichen vollständig, wenn der Exponent zur eckigen Klammer im vorliegenden Ausdruck einen positiven Wert annimmt. Dies gilt unter der Bedingung:

$$m > 2$$

Im Grenzfall deterministischen Werkstoffversagens

$$m \rightarrow \infty$$

ergibt sich für das Spannungsnahfeld in Analogie zur Irwin-Näherung für elastisch-plastisches Materialverhalten sogar ein konstanter Wert  $\sigma = \sigma_0$ .

## 7. J-Integral und energiedissipative Schadenszone

Unter Beachtung der nichtlokalen, kumulativen Schäden an der Rißfront läßt sich also zeigen, daß singuläre Spannungsfelder im Nahbereich unmittelbar um die Rißspitze verschwinden. Der Wert des zugehörigen J-Integrals charakterisiert aber auch in diesem Fall die Intensität des korrigierten Spannungsfelds außerhalb der Schadenszone [6]. Anwendungsgrenzen des J-Integrals als Bruchkennwert, wie sie aus der Deformationstheorie elastisch-plastischer Werkstoffe bei lokalen nichtlinearen Lastumverteilungen infolge Rißveränderung gelegentlich reklamiert werden, liegen bei korrekter Beachtung energiedissipativer Schadenszonen nicht vor, wie die Überlegungen des folgenden Abschnitts zeigen sollen. Ausgangspunkt für eine Analyse stabilen Rißwachstums unter den geschilderten Voraussetzungen ist eine kurze Rekonstruktion von Resultaten eines der Autoren zur Energiebilanz am Riß mit Schadenszone [7,8,9,10].

Vernachlässigt man die bei stabilem Rißwachstum unbedeutenden, kinetischen Energieanteile, so setzt sich die am Riß, pro Schnittebene umgesetzte Energie aus drei Anteilen zusammen.

$$d\Pi = J da + p e_0 dA_0 - q dt \quad (24)$$

Die Summe der beiden ersten Energiebeträge entspricht der am Riß dissipierten Energie. Der erste Term kennzeichnet die Energie, welche für den eigentlichen Rißfortschritt,  $\Delta a$ , verbraucht wird. Die Rißkenngröße  $J$  kennzeichnet als Intensitätsparameter das rißspitzennahe Spannungsfeld.

Der zweite Summand in der Bilanz (24) beschreibt die Arbeit, welche die Vergrößerung der Schädigungszone mit der Querschnittfläche  $A_0$  am Riß bewirkt. Beide Terme zusammen beinhalten Bruch- und Schadensarbeit

$$\rho e_0 dA_0 \propto JdJ \quad (25)$$

$\rho$  ist die mittlere Dichte des Materials; das Symbol  $e_0$  definiert als spezifische Deformationsenergiedichte die Berandung der Schadenszone. Diese Kontur stellt zugleich den innersten, möglichen Integrationsweg zur korrekten Berechnung des Bruchkennwerts  $J$  als Linienintegral dar. Erreicht die Umrißlinie mit dem Wachstum der Schadenszone die Probenränder wird  $J$  von einem reinen Rißparameter zur geometrieabhängigen Belastungsgröße.

Der dritte Term in Energiebilanz (24) berücksichtigt schließlich den Wärmefluß aus der Schädigungszone in das umgebende Material. Entscheidend für den stabilen Rißfortschritt ist die Frage mit welcher Rate mechanische Energie um die Rißfront dissipiert wird. Im Gleichgewichtszustand (stabiles Rißwachstum) kompensiert die abgeführte Wärme (26) den Energieanteil (25), welcher in der Schädigungszone durch Umwandlung von mechanischer in thermische Energie entsteht.

$$JdJ = (J_c^2 - J^2) da / r^* \quad (26)$$

Setzt man eine Wärmeabführung voraus, die proportional zu den jeweils noch verfügbaren Reserven des Materials gegen Rißausbreitung ist,

$$qdt \propto (J_c^2 - J^2) da \quad (27)$$

so wird der Rißfortschritt nach vorliegender Gleichung vom Produkt  $JdJ$  kontrolliert. Auswertungen experimenteller Daten [z.B. 10] zur gemessenen Dissipationsrate am Riß zeigen nach einem anfänglichen, steilen Abfall der Meßwerte die asymptotische Annäherung an einen stationären Grenzwert. Die Reserven der Werkstoffstruktur gegen Rißerweiterung werden gemäß Gleichung (27) mit dem vollständigen Aufbau einer endlichen Schädigungszone abgebaut; deren maximal erreichbaren Abmessungen sind von der Größenordnung des Proportionalitätsfaktors  $r^*$ .

Die Integration der Gleichgewichtsbedingung (27) führt zu rein materialspezifischen  $J_R$  – Kurven folgenden Typs:

$$J_R = \sqrt{J_c^2 - (J_c^2 - J^2) \exp(-\Delta a / r^*)} \quad (28)$$

**Bild 7** und **8** zeigen die Anpassung experimenteller Daten an die theoretische Funktion (28). Rißverlängerung tritt dann ein, so das Kriterium, wenn  $J$  in Abhängigkeit von der aktuellen Rißlänge und der Betriebslast die materialspezifische Kurve  $J_R(\Delta a)$  überschreitet. Große Werte des Rißwachstums, bezogen auf die Restligamentbreite ( $W-a$ ) der Probe, verletzen die Bedingungen für  $J$ -kontrolliertes Rißwachstum; das Spannungs-Dehnungsfeld am Riß wird in diesem Fall nicht mehr allein durch den Parameter  $J$  charakterisiert.

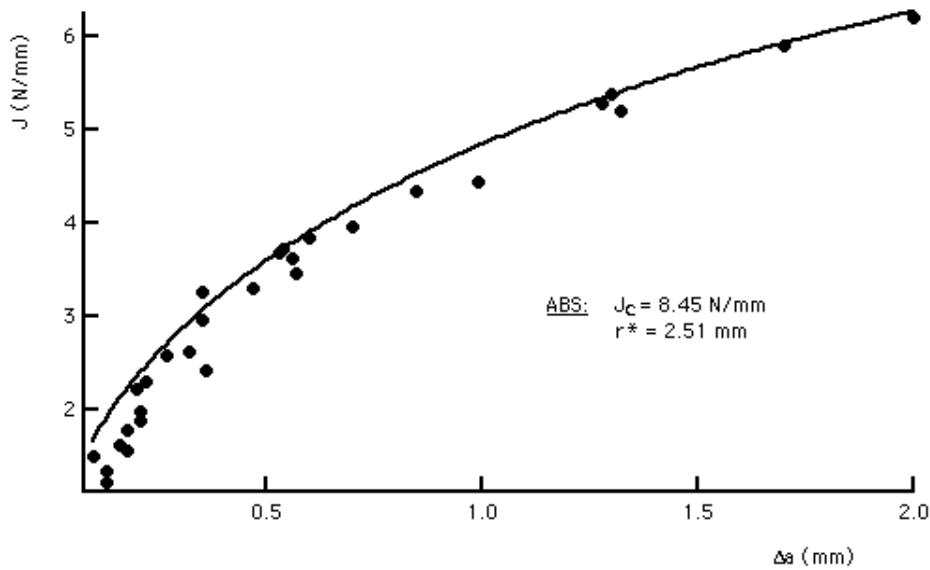


Bild 7: Acrylnitril-Butadien-Styren [11]

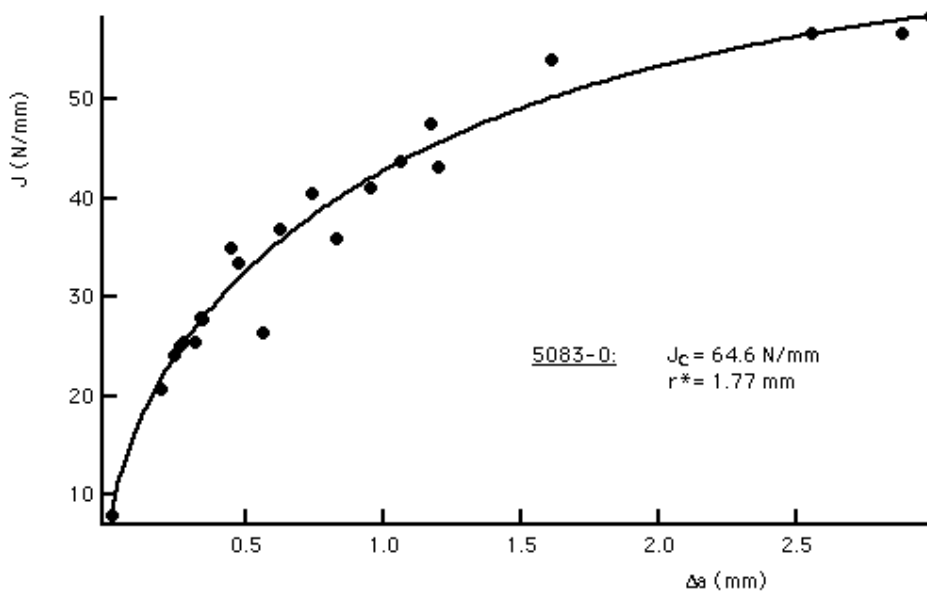


Bild 8: Niedrig zäher Stahl 5083-0 [4]

Vielmehr beeinflussen Geometrie und Abmessungen der Probe zunehmend die experimentell ermittelte Rißwiderstandskurve. Es treten Abweichungen von der materialspezifischen, theoretischen Rißwiderstandskurve auf, die sich nach Auffassung der Autoren auch nicht, wie in verschiedenen Arbeiten versucht [z.B.10], durch einen Wechsel zur Dissipationsrate als Bruchkennwert vermeiden lassen.

Die Bedingung für J-kontrolliertes Rißwachstum lautet:

$$\frac{(W - a) dJ}{J da} \ll 1 \quad (29)$$

Unter Beachtung dieser Nebenbedingung bekräftigt der Vergleich zwischen theoretischem Modell und experimentellen Bruchkennwerten (**Bild 7, 8**) die spezifische Form (28) der  $J_R$ -Kurve und ersetzt damit phänomenologische Vorgaben zur regressiven Anpassung von Meßdaten sowohl für niedrig zähe als auch für zähe Werkstoffe.

## 8. Literatur

1. Will P., Helbig S., Stochastik des lokalen Versagens in uniaxialen Faserverbunden - optimale Grenzflächenbruchzähigkeiten, DVM Arbeitskreis Bruchvorgänge, Proceedings der 23. Vortragsveranstaltung, Berlin, 26.-27.2.1991, 239-248
2. Will P., Helbig S., Ein stochastisches, schadensmechanisches Versagensmodell für Komposite, Mat.-wiss. u. Werkstofftech. 23 (1992) 368-374
3. Will P., Helbig S., Lokales kumuliertes Schadensmaß für Komposite - Rißspitzen ohne Singularität, Mat.-wiss. u. Werkstofftech. 28 (1997) 475-480
4. Will P., R-curves of energy dissipative materials, J. Mater. Sci. 29 (1994) 2335-2340
5. Anderson T. L., Fracture Mechanics, CRC Press, Boca Raton 1991, 63-86
6. Will P., Integralkriterien und ihre Anwendung in der Bruchmechanik, Fortschr.-Ber. VDI Reihe 18 (1988) Nr. 56
7. Will P., R-Kurven von energiedissipativen Werkstoffen mit Schädigungszone, Teil 1: Energieumsatz am Riß, Mat.-wiss. u. Werkstofftech. 24, (1993) 327-330
8. Will P., R-Kurven von energiedissipativen Werkstoffen mit Schädigungszone, Teil 2: Experimentelle Ermittlung von J-R Kurven, Mat.-wiss. u. Werkstofftech. 24, (1993) 362-366
9. Will P., Michel B., Schaper M., Justification of nonlinear J-resistance curves, Engng. Fract. Mech. 37, (1990) 2, 275-281
10. Memhard D., Brocks W., Fricke S., Characterisation of ductile tearing resistance by energy dissipation rate, Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. 16, (1993) 1109-1124
11. Grellmann W., Seidler S., Application of the instrumented impact test to the toughness characterisation of high impact thermoplastics, Polymer testing 14 (1995) 453-469

Prof. Dr. rer. nat. habil. P. Will, Prof. Dr. rer. nat. S. Helbig  
Hochschule Mittweida  
Technikumplatz 17, PF 91  
09648 Mittweida  
email: pwill@htwm.de