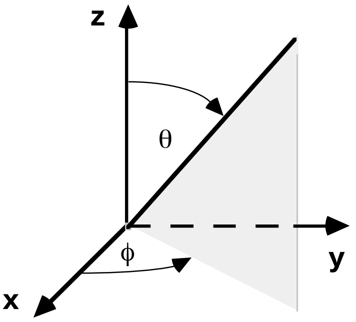
Lokale, 3-achsige Belastungen

Normalspannung (Flächennormale in Raumrichtung **(φ,θ)** **)**



$$\sigma = \sin^2\theta\left(\sigma_{xx}\cos^2\phi + \tau_{xy}\sin 2\phi + \sigma_{yy}\sin^2\phi\right) + \sigma_{zz}\cos^2\theta$$
$$+ \sin 2\theta\left(\tau_{yz}\sin\phi + \tau_{xz}\cos\phi\right)$$

Schubspannung (Flächennormale in Raumrichtung **(φ,θ)** **)**

$$\tau^2 = \sin^2\theta\Big[\left(\sigma_{xx}^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2\right)\cos^2\phi + \left(\sigma_{yy}^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2\right)\sin^2\phi$$
$$+ \sin 2\phi\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \tau_{yz}\right)\tau_{xy}\Big] + \cos^2\theta\left(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 + \sigma_{zz}^2\right)$$
$$+ \sin 2\theta\sin\phi\left(\tau_{xy}\tau_{xz} + \sigma_{yy}\tau_{yz} + \sigma_{zz}\tau_{yz}\right) - \sigma^2$$

Invarianten des Spannungstensors

$$I_I = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$I_{II} = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)$$

$$I_{III} = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{zx}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2$$

Die lokalen Hauptspannungen eines dreiachsig belasteten Volumenelementes sind mit den Eigenwerten des Spannungstensors identisch.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = \left(-\sigma^3 + I_I\sigma^2 - I_{II}\sigma + I_{III}\right) = 0$$

pwill@htwm.de

Die Lösungen σ zum vorliegenden Polynom 3. Grades ergeben sich aus folgenden Ansätzen:

Hauptspannungen

$$\sigma_i = \frac{1}{3} I_I + 2\sqrt{p}\cos\frac{\varphi}{3}$$

$$\sigma_j = \frac{1}{3} I_I + 2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) \qquad i,j,k = 1,2,3$$

$$\sigma_k = \frac{1}{3} I_I + 2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

mit den Hilfsgrößen:

$$p = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} I_I^2 - I_{II}\right)$$

$$\cos\varphi = -\frac{q}{p\sqrt{p}} \qquad 0 \le \varphi \le \pi$$

$$q = -\frac{1}{27} I_I^3 + \frac{1}{6} I_I I_{II} - \frac{1}{2} I_{III}$$

I_I, I_{II}, I_{III} Invarianten des Spannungstensors

pwill@htwm.de