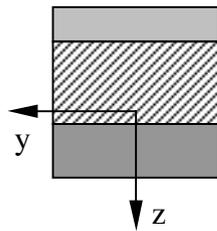


## Verbundsteg (querkraftfreie Biegung, isotrope Materialkomponenten)



### Biegespannung in den Verbundanteilen

$$\sigma_{xx}(k, x, z) = \frac{M_y(x)}{\frac{1}{E_k} \sum_j E_j I_{yy}(j)} z$$

x	Koordinate in Steglängsrichtung
$M_y(x)$	lokales Biegemoment
k, j	Nummern der einzelnen Verbundanteile
$E_j$	Elastizitätsmoduli der Verbundanteile (Index j)
$I_{yy}(j)$	axiales Flächenmoment 2. Ordnung des Querschnittanteils j

### Längskraftfreiheit am Steg

$$\sum_j E_j \iint_{A(j)} z dA = \sum_j E_j z_{SA}(j) A(j) = 0$$

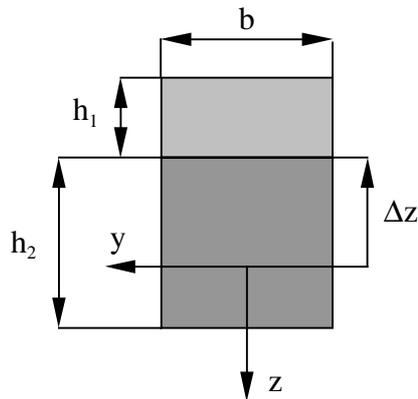
j	Nummern der Verbundanteile
$z_{SA}(j)$	z-Koordinate des Profilschwerpunkts vom Querschnittsanteil j im Koordinatensystem des Stegs
$E_j$	Elastizitätsmoduli der Verbundanteile (Index j)
$A(j)$	Querschnittsfläche der Verbundkomponente (Index j)

### Differentialgleichung der Biegelinie

$$\frac{d^2 u_z}{dx^2} = - \frac{M_y(x)}{\sum_j E_j I_{yy}(j)}$$

x	Koordinate in Steglängsrichtung
y	Biegeachse
$u_z(x)$	lokale Durchbiegung
$M_y(x)$	lokales Biegemoment
$E_j$	Elastizitätsmoduli der Verbundanteile (Index j)
$I_{yy}(j)$	axiales Flächenmoment 2. Ordnung des Querschnittanteils j

## Zweischichtsteg



### Längskraftfreiheit am Zweischichtsteg Lage der Materialgrenzschicht im Koordinatensystem

$$\Delta z = \frac{h_1^2 E_1 - h_2^2 E_2}{2(h_1 E_1 + h_2 E_2)}$$

$E_1, E_2$       Elastizitätsmoduli der Verbundanteile  
 $h_1, h_2$       Schichtdicken der Verbundanteile

### Lokaler Biegeradius

$$R(x) = \frac{b \left[ \frac{h_1^3 E_1 + h_2^3 E_2}{3} + \frac{(h_1 + h_2)^2 E_1 E_2 h_1 h_2}{(h_1 E_1 + h_2 E_2)} \right]}{M_y(x)}$$

$x$               Koordinate in Steglängsrichtung  
 $M_y(x)$       lokales Biegemoment  
 $b$               Querschnittsbreite  
 $E_1, E_2$       Elastizitätsmoduli der Verbundanteile  
 $h_1, h_2$       Schichtdicken der Verbundanteile

## Biegespannungen innerhalb der Materialkomponenten

$$\sigma_{xx}(1, x, z) = E_1 \frac{z}{R(x)} \quad \Delta z - h_1 \leq z \leq \Delta z$$

$$\sigma_{xx}(2, x, z) = E_2 \frac{z}{R(x)} \quad \Delta z \leq z \leq \Delta z + h_2$$

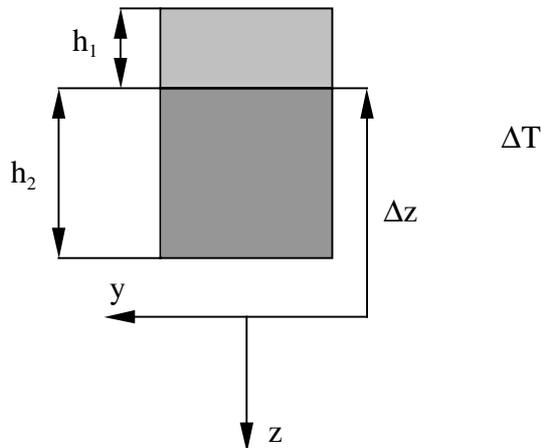
x	Koordinate in Steglängsrichtung
R(x)	lokaler Biegeradius
E <sub>1</sub> , E <sub>2</sub>	Elastizitätsmoduli der Verbundanteile
Δz	Lage der Materialgrenzschicht im Koordinatensystem
h <sub>1</sub> , h <sub>2</sub>	Schichtdicken der Verbundanteile

## Biegelinie

$$\frac{d^2 u_z}{dx^2} = -\frac{1}{R(x)}$$

x	Koordinate in Steglängsrichtung
u <sub>z</sub> (x)	lokale Durchbiegung
R(x)	lokaler Biegeradius

**Bimetall**  
**thermisch induzierte, querkraftfreie Biegung**



**Längskraft-, Momentenfreiheit am Bimetall**  
**Lage der Materialgrenzschicht im Koordinatensystem**

$$\Delta z = - \frac{3h_1h_2(\alpha_{T1} + \alpha_{T2}) + 4(\alpha_{T1}h_2^2 + \alpha_{T2}h_1^2) + \frac{E_1h_1^3}{E_2h_2}\alpha_{T1} + \frac{E_2h_2^3}{E_1h_1}\alpha_{T2}}{6(h_1 + h_2)(\alpha_{T1} - \alpha_{T2})}$$

$E_1, E_2$       Elastizitätsmoduli der Verbundanteile  
 $h_1, h_2$       Schichtdicken der Verbundanteile  
 $\alpha_{T1}, \alpha_{T2}$     Wärmeausdehnungszahlen der Verbundanteile

**Biegeradius (bzgl.  $z=0$ )**

$$R = - \frac{4(h_1 + h_2)^2 - 2h_1h_2 + \frac{E_1h_1^3}{E_2h_2} + \frac{E_2h_2^3}{E_1h_1}}{6(h_1 + h_2)(\alpha_{T1} - \alpha_{T2})\Delta T}$$

$E_1, E_2$       Elastizitätsmoduli der Verbundanteile  
 $h_1, h_2$       Schichtdicken der Verbundanteile  
 $\alpha_{T1}, \alpha_{T2}$     Wärmeausdehnungszahlen der Verbundanteile  
 $\Delta T$           Temperaturänderung

Die Gleichungen zur thermisch induzierten, querkraftfreien Biegung können auch genutzt werden, um bimorphe **Piezobieger** zu bewerten. Je nach Polarisation der Schichten (Index i) sind in diesem Fall folgende Terme auszutauschen:

$$\alpha_{T_i} \Delta T \rightarrow \pm d_i \frac{U_i}{h_i}.$$

Der Parameter  $d_i$  steht für den Piezomodul der Schicht;  $U_i$  ist die angelegte Spannung.

### Längsdehnung

$$\varepsilon_{xx}(z) = \frac{z}{R} \quad \Delta z - h_1 \leq z \leq \Delta z + h_2$$

R	Biegeradius
$h_1, h_2$	Schichtdicken der Verbundanteile
$\Delta z$	Lage der Materialgrenzschicht im Koordinatensystem

### Zwangsspannungen innerhalb der Materialkomponenten

$$\sigma_{xx}(1, z) = E_1 \left( \frac{z}{R} - \alpha_{T1} \Delta T \right) \quad \Delta z - h_1 \leq z \leq \Delta z$$

$$\sigma_{xx}(2, z) = E_2 \left( \frac{z}{R} - \alpha_{T2} \Delta T \right) \quad \Delta z \leq z \leq \Delta z + h_2$$

R	Biegeradius
$E_1, E_2$	Elastizitätsmoduli der Verbundanteile
$h_1, h_2$	Schichtdicken der Verbundanteile
$\alpha_{T1}, \alpha_{T2}$	Wärmeausdehnungszahlen der Verbundanteile
$\Delta T$	Temperaturänderung
$\Delta z$	Lage der Materialgrenzschicht im Koordinatensystem

### Biegelinie

$$\frac{d^2 u_z}{dx^2} = -\frac{1}{R} \quad |\Delta z| \ll |R|$$

x	Koordinate in Steglängsrichtung
$u_z(x)$	lokale Durchbiegung
R	Biegeradius
$\Delta z$	Lage der Materialgrenzschicht im Koordinatensystem