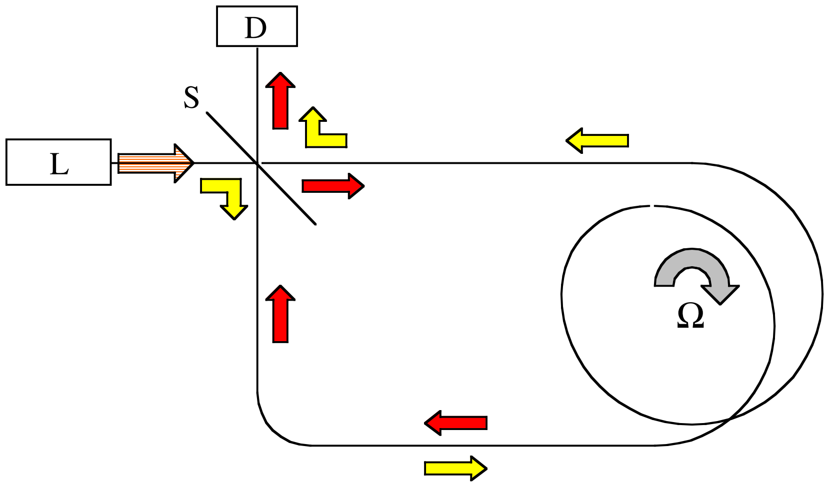
Sagnac Effekt
Optisches Fasergyroskop

Ein rotierender faseroptischer Ring (Winkelgeschwindigkeit Ω) wird von 2 Lichtstrahlen gespeist, welche die Anordnung im bzw. gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen. Da es sich um ein rotierendes Bezugssystem handelt, in dem Zwangskräfte auftreten, kommt es nach der allgemeinen Relativitätstheorie zu einer Differenz in der Zeit, die beide Strahlen für einen Umlauf benötigen; es tritt ein Phasenunterschied zwischen beiden Strahlen nach Durchlaufen des Ringes auf. Der Zeit- bzw. der Phasenunterschied zwischen beiden Strahlen hat den Wert:

$$\Delta t = \frac{4A}{c^2}\Omega \quad \rightarrow \quad \Delta\Phi = \frac{8\pi A}{\lambda c}\Omega$$

λ Wellenlänge des Lichtes

Der Phasenunterschied wird am Detektor ausgewertet. Das Messergebnis ist nicht abhängig vom Brechungsindex des Fasermaterials.
Die vom Faserring eingeschlossene Fläche A und damit die Empfindlichkeit des Systems kann durch eine Spule mit vielen Windungen deutlich erhöht werden.

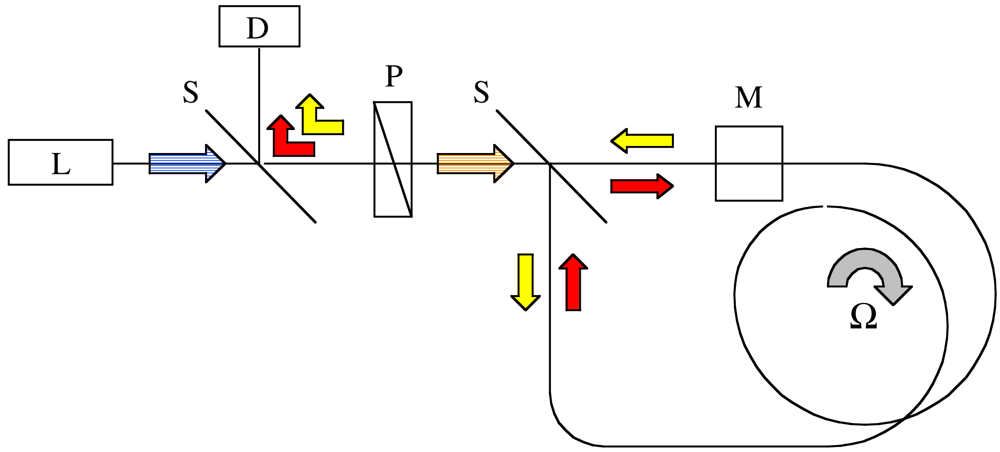


L Laserdiode
S Strahlenteiler
D Detektor

Um mögliche Modenumwandlungen im Lichtwellenleiter zu verhindern, wird die Verwendung einer Monomodefaser vorausgesetzt.

Die praktische Realisierung des Prinzips erfordert zusätzliche Korrekturen. In der skizzierten Anordnung wird das entgegen dem Uhrzeigersinn laufende Signal (gelb) zweimal reflektiert; die im Uhrzeigersinn umlaufende Lichtwelle (rot) dagegen transmittiert den Strahlenteiler S zweifach. Die Folge sind zusätzliche Phasensprünge neben dem Messwert ΔΦ.
Ein 2. Strahlenteiler korrigiert diese Unsymmetrie; es wird damit ein reziproker Aufbau erreicht. Die folgende Skizze zeigt diese Modifikation, die mit weiteren, notwendigen Ergänzungen zur obigen Anordnung erst zu einem funktionierenden Rotationssensor führt.

pwill@htwm.de



Wie die geänderte Skizze zeigt, sind neben dem 2. Strahlenteiler S noch zwei optische Elemente hinzugekommen:

Der **Polarisator P** garantiert einen definierten Polarisationszustand, um mögliche Modenkonversionen zwischen den beiden orthogonalen Polarisationzuständen in der Monomodefaser auszufiltern.

Der **Phasenmodulator M** ist schließlich aus folgenden Gründen erforderlich:

Die Intensität der beiden interferierenden Lichtwellen am Detektor hätte ohne Phasenmodulator M den Wert:

$$S = \frac{S_o}{2}[1 + \cos\Delta\Phi] \approx S_o - \frac{\Delta\Phi^2}{4}$$

S_o Intensität am Detektor im Ruhezustand des Gyroskops (Ω=0)

Die Kennlinie des Systems wäre bei den zu erwartenden, geringen Phasenverschiebungen nichtlinear; ihre Empfindlichkeit ginge gegen Null.
Außerdem würden unterschiedliche Drehrichtungen wegen der symmetrischen cos-Funktion nicht erkannt.
Eine zusätzliche Phasenverschiebung um π/2 korrigiert die genannten Nachteile der ursprünglichen Anodnung. Die Kennlinie zeigt in diesem Fall ein lineares Verhalten:

$$S = \frac{S_o}{2}\left[1 + \cos\left(\Delta\Phi + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{S_o}{2}[1 - \sin\Delta\Phi] \approx \frac{S_o}{2}[1 - \Delta\Phi]$$

Unterschiedliche Vorzeichen der Phasenverschiebung sind mit der verbesserten Variante nachweisbar.

pwill@htwm.de

Die Empfindlichkeit wurde optimiert; allerdings liegt noch ein hoher Untergrund vor. Das Einfügen einer zeitperiodischen Phasenverschiebung:

$\alpha \sin(\omega t)$ mit der Kreisfrequenz ω,

anstelle eines konstanten Wertes $\pi/2$, führt zu folgender Kennlinie:

$$S = \frac{S_o}{2}\{1 + \cos[\Delta\Phi + \alpha \sin(\omega t)]\}$$

Die 1. Grundschwingung einer Fourieranalyse dieses modifizierten Messsignals ergibt die Amplitude:

$A_1 = S_o J_1(\alpha) \sin \Delta\Phi$ ($J_1(\alpha)$ Besselfunktion (erster Art), 1. Ordnung),

die unmittelbar ausgewertet werden kann, um die Winkelgeschwindigkeit Ω zu bestimmen

Das Einfügen einer zusätzlichen, periodisch veränderlichen Phasenverschiebung hat zu berücksichtigen, dass der Phasenunterschied zwischen zwei entgegengesetzt laufenden Wellen in der gleichen Faserschleife zu generieren ist. Dazu wird der Phasenmodulator am Anfang des Rings installiert. Die im Uhrzeigersinn umlaufende Welle erfährt am Eingang des Rings zum Zeitpunkt t eine Phasenverschiebung:

$$\Delta\Phi_- = \frac{\alpha}{2}\sin(\omega t)$$

Die Amplitude wird durch die Steuerspannung am Phasenmodulator festgelegt.
Die gegen den Uhrzeigersinn laufende Welle muss erst die Faserschleife durchlaufen, ehe sie den Phasenmodulator erreicht; dazu braucht sie die Zeit:

$$\delta t = \frac{nl}{c}$$

Der Parameter *l* steht für die Faserlänge; n ist der zugehörige Brechungsindex.
Die entsprechende Phasenverschiebung am Ausgang des Faserrings hat damit den aktuellen Wert:

$$\Delta\Phi_+ = \frac{\alpha}{2}\sin[\omega(t - \delta t)]$$

Zwischen beiden Zusatzphasen ergibt sich folgende Differenz:

$$\Delta\Phi_- - \Delta\Phi_+ = \frac{\alpha}{2}\left[\sin(\omega t) - \sin(\omega t)\cos(\omega\delta t) + \cos(\omega t)\sin(\omega\delta t)\right]$$

Wählt man die Modulationskreisfrequenz so, dass gilt:

$$\omega = \frac{(2k+1)\pi}{\delta t} = \frac{(2k+1)\pi c}{nl} \qquad \text{(k=0,1,2,3,...)}$$

reduziert sich der vorliegende Ausdruck auf die Relation:

$$\Delta\Phi_- - \Delta\Phi_+ = \alpha\sin(\omega t)$$

dies entspricht der beabsichtigten, zusätzlichen Phasendifferenz.

Berechnen Sie Zeitdifferenz und Phasenverschiebung in der Faserspule eines Gyroskops mit dem Radius R=5cm und N=1000 Wicklungen bei der Winkelgeschwindigkeit:

$\Omega=7.3\bullet10^{-5}$ rad/s (Erddrehung) $\Delta t=2.5\bullet10^{-20}$ s

$\Omega=1\bullet10^{-1}$ rad/s / (Sekundenzeiger einer Uhr) $\Delta t=3.5\bullet10^{-17}$ s

Mit welcher Kreisfrequenz muss der Phasenmodulator betrieben werden ?

pwill@htwm.de