

Torsionsschwingungen

Homogener Stab ohne Wölbbehinderung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(GI_T \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) - \rho I_p \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} = 0$$

G	Schubmodul
I_T	Torsionsträgheitsmoment zur Torsionsachse x
I_p	polares Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich Torsionsachse x
ρ	Dichte des Materials
ϕ_x	Verdrehung um die Längsachse x

Separation der Variablen

$$\phi_x(x, t) = \Phi(x) \cos(\omega t - \alpha) \quad \frac{d}{dx} \left(GI_T \frac{d\Phi}{dx} \right) + \rho I_p \omega^2 \Phi = 0$$

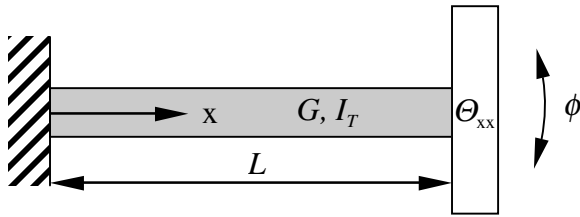
ω	Kreisfrequenz der Hauptschwingung
α	Phasenverschiebung
G	Schubmodul
I_T	Torsionsträgheitsmoment zur Torsionsachse x
I_p	polares Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich Torsionsachse x
ρ	Dichte des Materials

Konstantes Torsionsträgheitsmoment

$$\Phi(x) = C_1 \cos \kappa x + C_2 \sin \kappa x \quad \kappa = \omega \sqrt{\frac{\rho I_p}{GI_T}}$$

G	Schubmodul
I_T	Torsionsträgheitsmoment zur Torsionsachse x
I_p	polares Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich Torsionsachse x
ρ	Dichte des Materials
ω	Kreisfrequenz der Hauptschwingung

**Einseitig fest eingespannter kreiszylindrischer Schaft
Zusätzlicher starrer Körper am freien Ende**



Randbedingungen:

Verdrillungsbehinderung

$$\phi(0) = 0$$

Drallsatz Zusatzkörper

$$GI_T \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = -\Theta_{xx} \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} \Big|_{x=l}$$

- G Schubmodul
- I_T Torsionsträgheitsmoment zur Torsionsachse x
- l Schaftlänge
- Θ_{xx} axiales Massenträgheitsmoment des starren Zusatzkörpers

Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_j = \kappa_j \sqrt{\frac{GI_T}{\rho I_p}}$$

- κ_j Eigenwert der Eigenschwingung j
- G Schubmodul
- I_T Torsionsträgheitsmoment zur Torsionsachse x
- ρ Dichte des Materials
- I_p polares Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich Torsionsachse

Charakteristische Gleichung

$$\cos \kappa l - \frac{\Theta_{xx}}{\rho I_p} \kappa \sin \kappa l = 0$$

- Θ_{xx} axiales Massenträgheitsmoment des starren Zusatzkörpers
- l Schaftlänge
- ρ Dichte des Materials
- I_p polares Flächenmoment 2. Ordnung bezüglich Torsionsachse

$\frac{\Theta_{xx}}{\rho I_p l}$	$\kappa_1 l$	$\kappa_2 l$	$\kappa_3 l$
1	0.860334	3.425618	6.437298
2	0.653271	3.292310	6.361620
4	0.480094	3.219099	6.322705
8	0.346354	3.180870	6.303014

$\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ Eigenwerte der ersten Eigenschwingungen

Eigenschwingform zum Index j

$$\phi_j(x, t) = C_{2j} \sin(\kappa_j x) \cos(\omega_j t - \alpha_j)$$

ω_j Eigenkreisfrequenz

α_j Phasenverschiebung