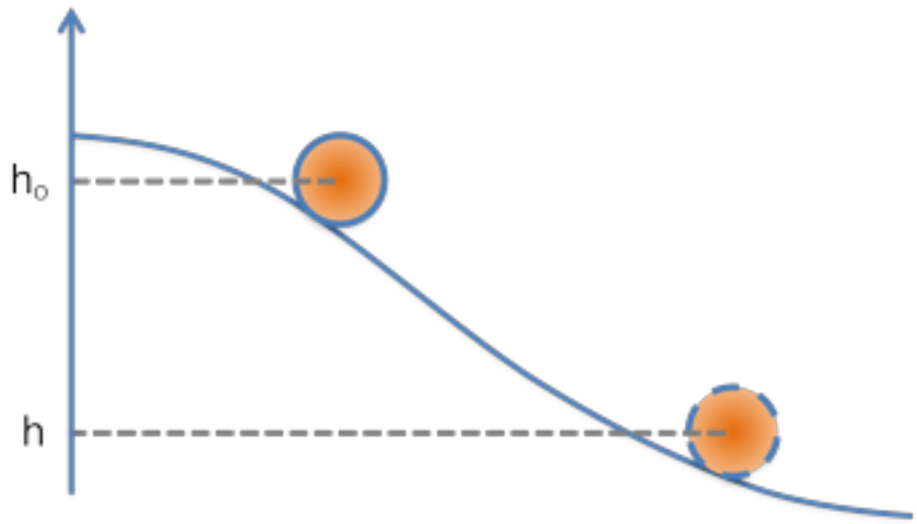
Ein einfaches Beispiel zur Energieerhaltung betrifft die Analyse der Dynamik von abrollenden Körpern am Hang.

Ein Zylinder und eine Kugel - beide mit der Masse m und dem Radius R - rollen aus der Höhe h_o einen Hang hinab. Sie starten aus dem Ruhezustand.
Wie groß ist das Verhältnis der Bahngeschwindigkeiten beider Schwerpunkte zwischen Zylinder und Kugel, wenn beide die Höhe h (s. Skizze) erreicht haben?



Die Energiebilanz beim Start beinhaltet nur einen Anteil an potentieller Energie, zu der infolge der Bewegung die kinetische Energie des Schwerpunktes hinzukommt sowie die Rotationsenergie des abrollenden Körpers mit dem Massenträgheitsmoment J_S:

$$mgh_o = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}J_S\omega^2 + mgh$$

Die potentielle Energie dagegen nimmt mit der niedrigeren Höhe ab.
Winkelgeschwindigkeit ω und Bahngeschwindigkeit v_S sind nicht unabhängig voneinander; es gilt die kinematische Beziehung:

$v_S = R\omega$

Die Kombination beider Gleichungen führt zum Resultat:

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{J_S}{R^2}\right)v_S^2 = mg\left(h_o - h\right)$$

Die Massenträgheitsmomente für Zylinder bzw. Kreisscheibe und Kugel mit konstanter Dichte unterscheiden sich:

Zylinder	Kugel
$J_S = \frac{m}{2}R^2$	$J_S = \frac{2}{5}mR^2$

Das Verhältnis beider Bahngeschwindigkeiten nach dem Start nimmt damit, unabhängig von den konkreten Massen und Radien, folgenden, konstanten Wert an:

$$\frac{v_{SZylinder}}{v_{SKugel}} = \sqrt{\frac{14}{15}}$$

<u>Vorsprung durch Kompetenz:</u>

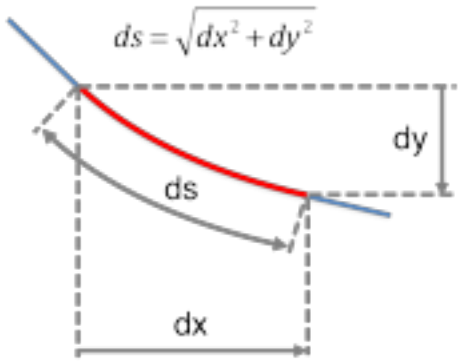
Abgesehen von möglichen Schwierigkeiten beim Lenken wäre ein Seifenkistenfahrzeug mit homogenen, kugelförmigen Rädern schneller als ein Vehikel mit konventionellen, scheibenförmigen Rädern.
Auch wenn Sie nicht genau abschätzen können, wohin Sie Ihr Gefährt bringt, so sind Sie doch umso schneller dort.

Brachistochrone

Im vorherigen Abschnitt wurden die Geschwindigkeiten abrollender Körper verglichen. In Ergänzung dieser Analyse stellt sich die eher akademische Frage, auf welcher Bahnkurve die Objekte unter dem Einfluss der Schwerkraft in kürzester Zeit das Ziel erreichen. Wie die folgenden Überlegungen zeigen, führt nicht, wie intuitiv zu vermuten wäre, die kürzeste, geradlinige Verbindung zwischen zwei Positionen A und B zum Erfolg.
Die Zeit zum Durchlauf zwischen zwei infinitesimal benachbarten Punkten ergibt sich aus dem Verhältnis von Strecke (rot) zu lokaler Bahngeschwindigkeit:

$$dt = \frac{ds}{v_s}$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$



Die bereits zuvor genutzte Energiebilanz im Schwerefeld:

$$mgy_A = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}J_S\omega^2 + mgy \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(m + \frac{J_S}{R^2}\right)v_S^2 = mg\left(y_A - y\right)$$

resultiert in der lokalen Geschwindigkeit:

$$v_S(x) = C\sqrt{y_A - y(x)} \qquad \text{mit} \qquad C = \sqrt{\frac{2g}{1 + \frac{J_S}{mR^2}}}$$

Die Bedingung nach einer Minimierung der Zeit:

$$T = \frac{1}{C}\int_{0}^{x_B}\sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{y_A - y(x)}}dx$$

für die Bewegung entlang der Bahnkurve zwischen höher gelegenem Startpunkt $(0, y_A)$ und Endpunkt (x_B, y_B) folgt aus der Extremwertbedingung nach Euler-Lagrange:

Extremum eines Funktionals $\int_{a}^{b} f\big(y(x), y'(x)\big)dx$

$$\frac{\partial f\big(y, y'\big)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f\big(y, y'\big)}{\partial y'} = 0$$

Die Lösung zu dieser Kondition basiert auf einer Modifikation der vorliegenden Gleichung, indem der obige Ausdruck mit dem Faktor y' multipliziert und schließlich eine Null in der Form:

$$\frac{\partial f}{\partial y'}y'' - \frac{\partial f}{\partial y'}y''$$

hinzugefügt wird. Alle Anteile, in eckigen Klammern neu zusammengefasst, ergeben:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y''\right] - \left[\frac{\partial f}{\partial y'}y'' + y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right] = \frac{d}{dx}\left(f - \frac{\partial f}{\partial y'}y'\right) = 0$$

Der Term in runden Klammern muss konstant sein; die Bedingung führt zu:

$$(y_A - y)\left(1 + y'^2\right) = D$$

Lösungen dieser Differentialgleichung sind parametrische Kurven vom Typ einer Zykloide:

$$y(t) = y_A - \frac{D}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{\tau}t\right)$$

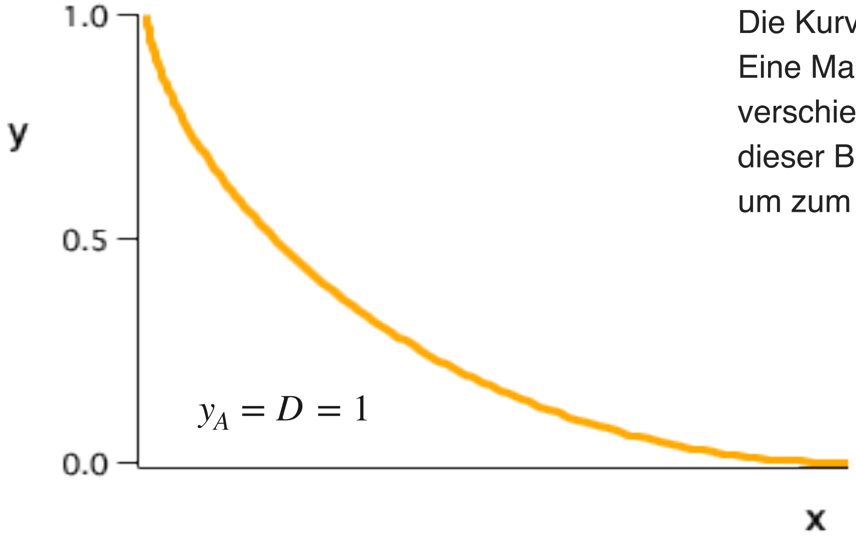
$$x(t) = \frac{D}{2}\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \sin\frac{2\pi}{\tau}t\right) \qquad 0 \le x < \pi D\,,$$

wie unter Beachtung von:

$$y' = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-\sin\frac{2\pi}{\tau}t}{1 - \cos\frac{2\pi}{\tau}t}$$

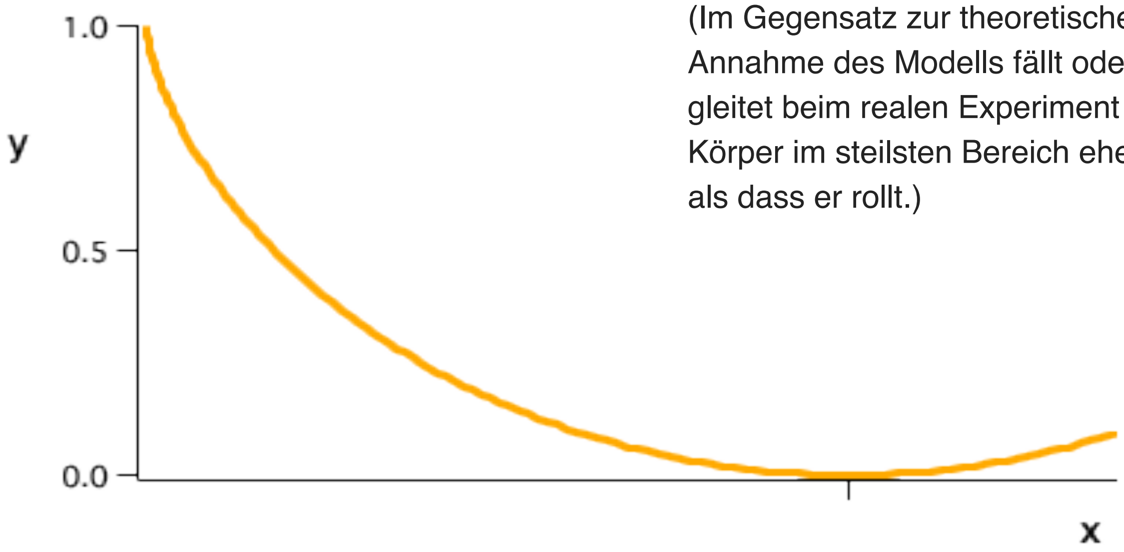
leicht nachgeprüft werden kann.
Die vorliegende Zykloide kann als horizontal gespiegelte Kurve interpretiert werden, die ein markierter Punkt auf dem Umfang eines Rads mit dem Durchmesser D beschreibt, das in der Ebene auf einer parallelen Linie (Abstand y_A) zur x-Achse abrollt.

- Die gesuchte Gestalt des Abhangs ist, weitgehende Reibungsfreiheit vorausgesetzt, unabhängig von der Masse und dem Massenträgheitsmoment des bewegten Objekts.



Die Kurve ist tautochron:
Eine Masse benötigt für beliebige, verschiedene Startpositionen auf dieser Bahn immer die gleiche Zeit, um zum Tiefpunkt zu gelangen.

- Die Tangente am höchsten Punkt *A* der ermittelten Brachistochrone (schnellste Verbindung) verläuft senkrecht; der Geschwindigkeitszuwachs ist dort am stärksten.



(Im Gegensatz zur theoretischen Annahme des Modells fällt oder gleitet beim realen Experiment der Körper im steilsten Bereich eher, als dass er rollt.)

- Wie das zweite Diagramm zeigt, muss bei größeren, horizontalen Abständen erst die Talsohle durchlaufen werden, um das Ziel schnellstmöglich erreichen zu können.

Auszug aus dem dem iBook: P. Will, Technische Mechanik, pp 243-46 (Version 2021)