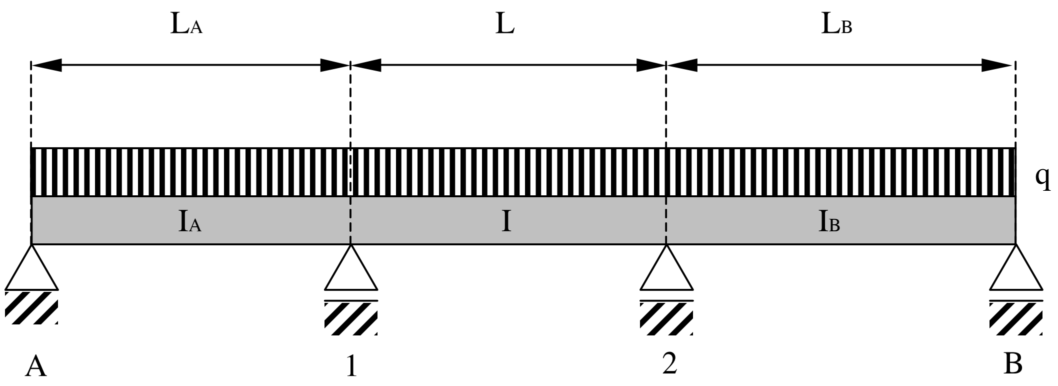
P. Will

Durchlaufträger (gleichmäßige Linienlast q)

Elastizitätsmodul: E
Flächenmomente 2. Ordnung: I_A , I , I_B



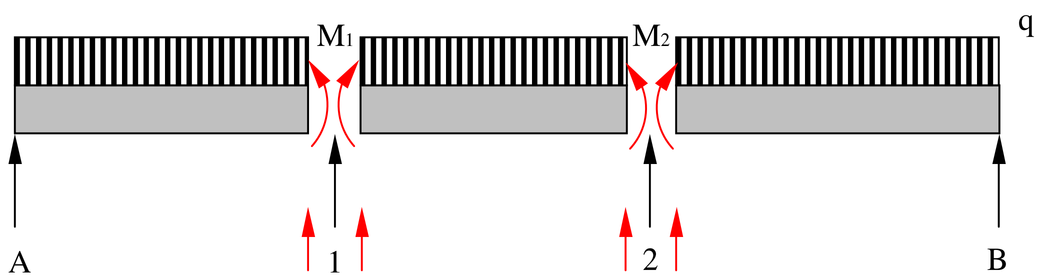
Momentenbilanzen:

$$F_1 L_A + F_2\left(L_A + L\right) + F_B\left(L_A + L + L_B\right) - \frac{q}{2}\left(L_A + L + L_B\right)^2 = 0 \qquad \text{(bzgl. A)}$$

$$-F_2 L_B - F_1\left(L + L_B\right) - F_A\left(L_A + L + L_B\right) + \frac{q}{2}\left(L_A + L + L_B\right)^2 = 0 \qquad \text{(bzgl. B)}$$

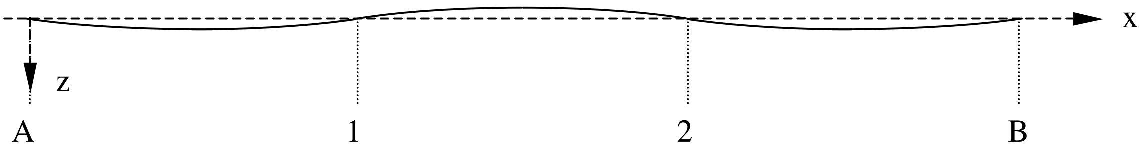
Infolge überzähliger Stützen ist das obige Tragwerk statisch unbestimmt. Die beiden Momentenbilanzen bzw. alternativ eine Kräftebilanz und eine Momentenbilanz reichen allein nicht aus, um die Lagerreaktionen zu ermitteln.

Die vorliegende, statisch unbestimmte Anordnung wird durch ein mechanisch gleichwertiges, mehrteiliges Ersatzsystem substituiert. Die statisch überzähligen Stützenreaktionen werden an den Schnittufern als geteilte Stützkräfte eingetragen. Außerdem sind Schnittmomente an den Schnittufern zu berücksichtigen, welche infolge elastischer Verformungen des Biegeträgers auftreten.



pwill@hs-mittweida.de

Die Formänderungen des Ersatzsystems müssen kompatibel zu denen des Durchlaufträgers sein; es darf kein Knick in der Stabachse auftreten. Die Tangenten an die Biegelinien $u_z(x)$ in benachbarten Komponenten müssen über jeder Innenstütze deckungsgleich sein.

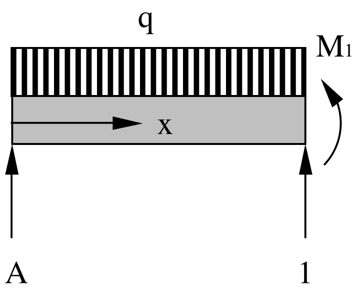


Die Formänderungen der auf Biegung belasteten Teilträger ergeben sich aus der Superposition (additiven Überlagerung) folgender Einzelbelastungen:

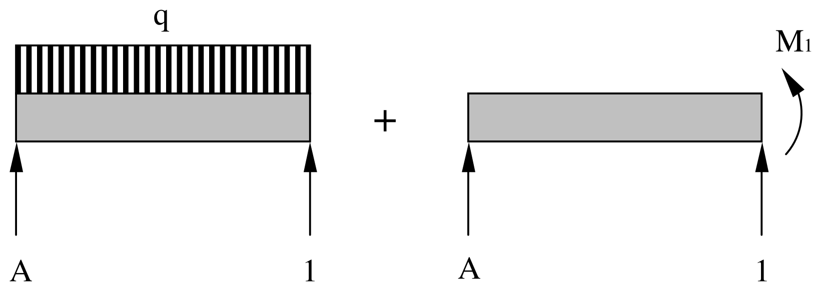
Linkes Balkenelement:

Momentenbilanz:

$$M_1 + F_{1links} L_A - \int_0^{L_A} qx\,dx = M_1 + F_{1links} L_A - \frac{qL_A^2}{2} = 0$$



=



Randbedingungen:

$$\left.\frac{du_z}{dx}\right|_1 = -\frac{qL_A^3}{24EI_A} \qquad \left.\frac{du_z}{dx}\right|_1 = -\frac{M_1 L_A}{3EI_A}$$

(s. Will, Lämmel: Kleine Formelsammlung Technische Mechanik, Fachbuchverlag Leipzig, 5. Auflage, S. 71-72, S. 68)

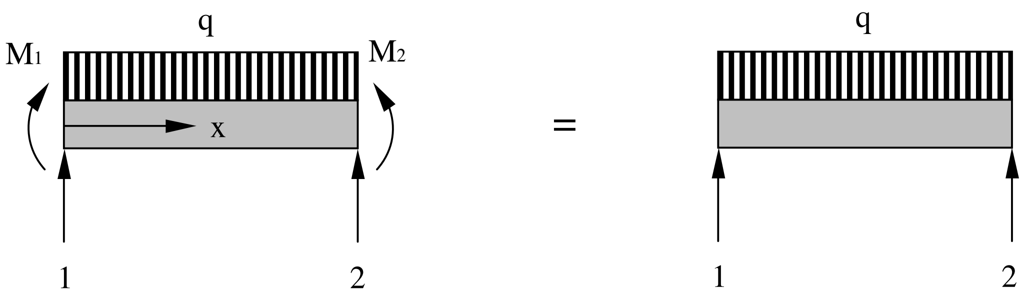
pwill@hs-mittweida.de

Mittleres Balkenelement:

Momentenbilanzen:

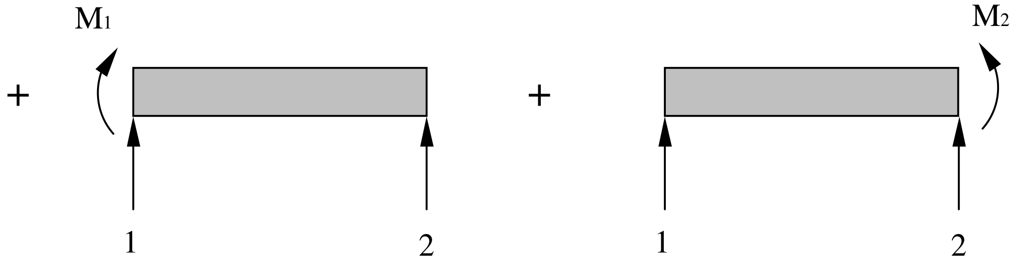
$$-M_1 - F_{1rechts} L + \frac{q}{2} L^2 + M_2 = 0 \qquad \text{(bzgl. 2)}$$

$$-M_1 - \frac{q}{2} L^2 + F_{2links} L + M_2 = 0 \qquad \text{(bzgl. 1)}$$



Randbedingungen:

$$\left.\frac{du_z}{dx}\right|_1 = \frac{qL^3}{24EI} \qquad \left.\frac{du_z}{dx}\right|_2 = -\frac{qL^3}{24EI}$$



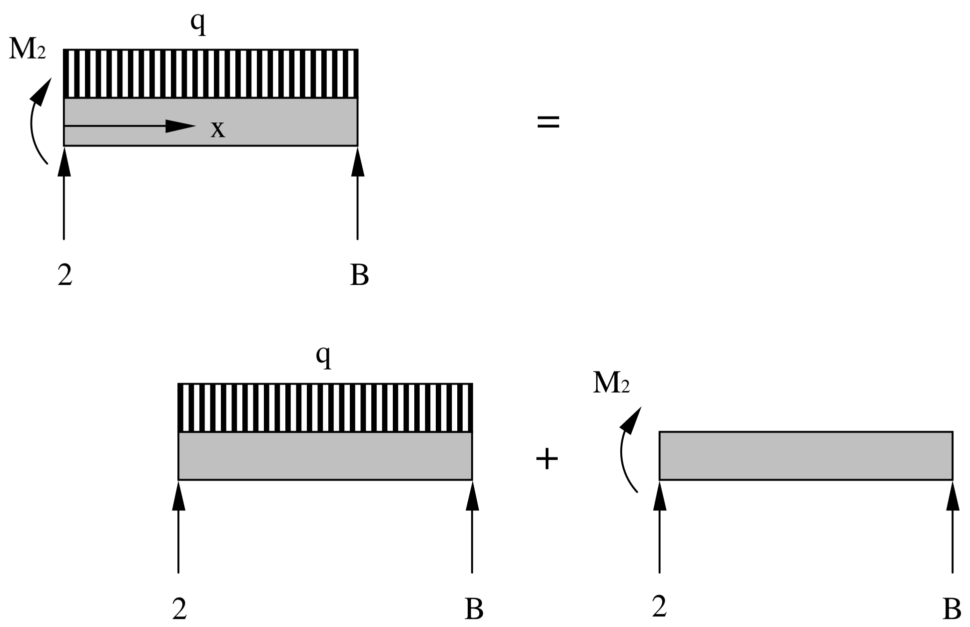
Randbedingungen:

$$\left.\frac{du_z}{dx}\right|_1 = \frac{M_1 L}{3EI} \qquad \left.\frac{du_z}{dx}\right|_2 = -\frac{M_1 L}{6EI} \qquad \left.\frac{du_z}{dx}\right|_1 = \frac{M_2 L}{6EI} \qquad \left.\frac{du_z}{dx}\right|_2 = -\frac{M_2 L}{3EI}$$

(s. Will, Lämmel: Kleine Formelsammlung Technische Mechanik, Fachbuchverlag Leipzig, 5. Auflage, S. 71-72, S. 68)

Rechtes Balkenelement:

Momentenbilanz: $-M_2 - F_{2rechts} L_B + \int\limits_0^{L_B} q\left(L-x\right)dx = -M_2 - F_{2rechts} L_B + \frac{qL_B^2}{2} = 0$



Randbedingungen:

$$\left.\frac{du_z}{dx}\right|_2 = \frac{qL_B^3}{24EI_B} \qquad\qquad \left.\frac{du_z}{dx}\right|_2 = \frac{M_2 L_B}{3EI_B}$$

(s. Will, Lämmel: Kleine Formelsammlung Technische Mechanik, Fachbuchverlag Leipzig, 5. Auflage, S. 71-72, S. 68)

Die Kongruenz der Tangenten an den Innenstützen führt zu folgenden Beziehungen für die unbekannten Schnittmomente:

$$-\frac{qL_A^3}{24EI_A} - \frac{M_1 L_A}{3EI_A} = \frac{qL^3}{24EI} + \frac{M_1 L}{3EI} + \frac{M_2 L}{6EI} \qquad \text{(Stütze 1)}$$

und

$$-\frac{qL^3}{24EI} - \frac{M_1 L}{6EI} - \frac{M_2 L}{3EI} = \frac{qL_B^3}{24EI_B} + \frac{M_2 L_B}{3EI_B} \qquad \text{(Stütze 2)}$$

Die Stützkräfte F1 und F2 der Innenstützen sind die Summen ihrer linken bzw. rechten Teilkomponenten an gegenüberliegenden Schnittufern. Letztere folgen aus den Momentenbilanzen an den einzelnen Balkenelementen:

$$F_1 = F_{1links} + F_{1rechts} = \frac{q}{2} L_A - \frac{M_1}{L_A} + \frac{q}{2} L - \frac{M_1}{L} + \frac{M_2}{L}$$

$$F_2 = F_{2links} + F_{2rechts} = \frac{q}{2} L + \frac{M_1}{L} - \frac{M_2}{L} + \frac{q}{2} L_B - \frac{M_2}{L_B}$$

Die Stützkräfte FA , FB der Außenlager ergeben sich schließlich aus den beiden Momentenbilanzen am freigeschnittenen, gesamten Durchlaufträger (s. vorn).
Die Zusammenfassung der obigen Beziehungen führt zu einem linearen Gleichungssystem, welches die Berechnung aller Lagerkräfte ermöglicht:

$$\begin{pmatrix} 0 & L_A & L_A + L & L_A + L + L_B & 0 & 0 \\ L_A + L + L_B & L + L_B & L_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{L_A} + \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} + \frac{1}{L_B} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{L_A}{I_A} + \frac{L}{I}\right) & -\frac{L}{2I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{2I} & -\left(\frac{L}{I} + \frac{L_B}{I_B}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_A \\ F_1 \\ F_2 \\ F_B \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q}{2}\left(L_A + L + L_B\right)^2 \\ \frac{q}{2}\left(L_A + L + L_B\right)^2 \\ \frac{q}{2}\left(L_A + L\right) \\ \frac{q}{2}\left(L + L_B\right) \\ \frac{q}{8}\left(\frac{L_A^3}{I_A} + \frac{L^3}{I}\right) \\ \frac{q}{8}\left(\frac{L^3}{I} + \frac{L_B^3}{I_B}\right) \end{pmatrix}$$

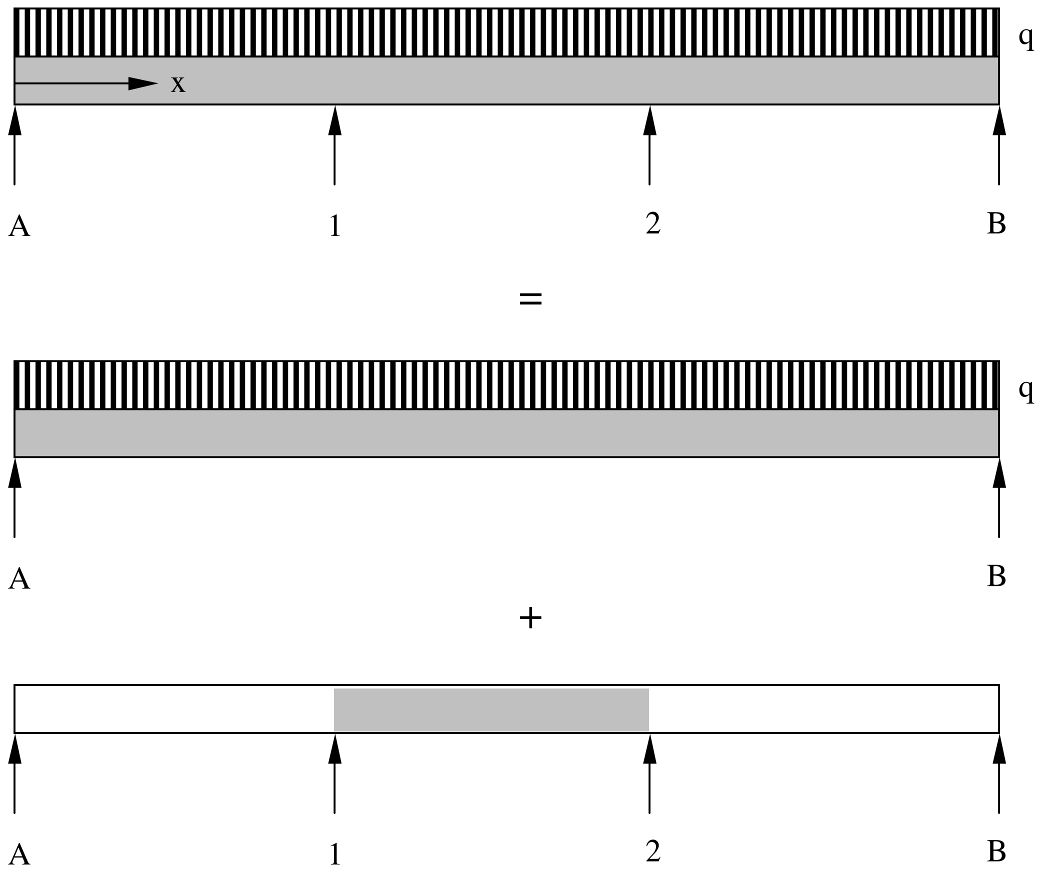
Im Sonderfall gleicher Distanzen zwischen den Stützen und einheitlicher Flächenmomente 2. Ordnung in allen drei Balkenfeldern erhält man folgende Resultate:

$$F_A = F_B = \frac{2}{5} qL \qquad F_1 = F_2 = \frac{11}{10} qL \qquad M_1 = M_2 = -\frac{qL^2}{10}$$

Um das Bild der Lösung zu vervollständigen, werden noch die Anstiege der Tangenten zur Biegelinie über den Innenstützen angegeben:

$$\left.\frac{du_z}{dx}\right|_1 = -\frac{qL^3}{120EI} \qquad \left.\frac{du_z}{dx}\right|_2 = \frac{qL^3}{120EI}$$

Alternativ ließen sich die Stützkräfte der Innenstützen auch direkt über die Superposition der Biegelinien folgender Einzelbelastungen unter Beachtung der Verträglichkeiten in den Durchbiegungen an diesen Lagern ermitteln:



$$u_{zI}(x) = \frac{q}{24EI}\left\{x\left(L_A + L + L_B\right)\left[\left(L_A + L + L_B\right)^2 - 2x^2\right] + x^4\right\}$$

$$u_{ZII}(x) = \frac{FL_A}{6EI}\left[L_A^2 - 3x\left(L_A + L + L_B - x\right)\right] \qquad \text{für} \qquad L_A \le x \le L + L_A$$

(Voraussetzung Symmetrie: $L_A = L_B \quad \Rightarrow \quad F_1 = F_2 = F$)

(s. Will, Lämmel: Kleine Formelsammlung Technische Mechanik, Fachbuchverlag Leipzig, 5. Auflage, S. 71-72, S. 70-71)

Die Durchbiegungen an den Lagern haben a priori den Wert Null, vorausgesetzt alle Stützen befinden sich in gleicher Höhe; es gilt:

$u_{zI}\left(x = L_A\right) + u_{zII}\left(x = L_A\right) = 0$ bzw. $u_{zI}\left(x = L_A + L\right) + u_{zII}\left(x = L_A + L\right) = 0$

d.h. $F = \frac{q}{4}\frac{\left(5L_A^3 + 10L_A^2 L + 6L_A L^2 + L^3\right)}{L_A\left(2L_A + 3L\right)}$ (symmetrische Anordnung: $L_A = L_B$)

pwill@hs-mittweida.de