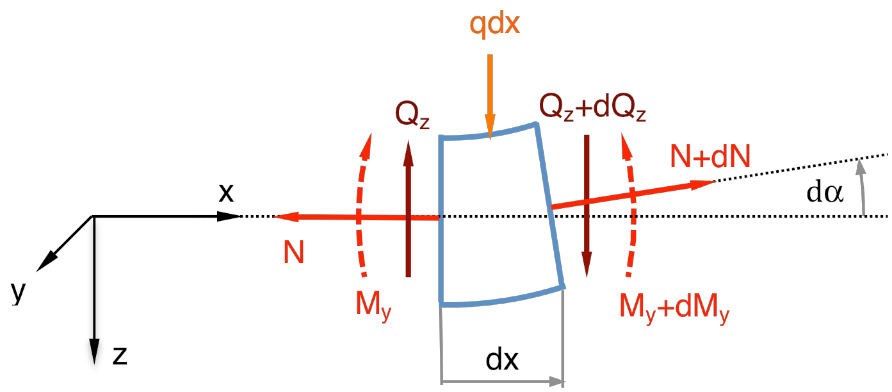
Knickbiegung

Schnittgrößen am verformten Balkenelement:



Gleichgewicht am verformten Balkenelement:

Kräftebilanzen:

$\rightarrow \qquad dN = 0$

$\downarrow \qquad dQ_z + qdx + N\dfrac{d^2u_z}{dx^2}dx = 0$

kleine Verformungen:

$$d\alpha \approx -\frac{d^2u_z}{dx^2}dx$$

Momentenbilanz:

$\curvearrowleft \qquad dM_y - Q_z dx = 0$

N_x axiale Längskraft
Q_z lokale Querkraft
q lokale Linienlast pro Länge
M_y lokales Biegemoment
u_z lokale Durchbiegung

konstante, axiale Drucklast

$$-P_x = N \le 0$$

$$\frac{dQ_z}{dx} = -q + P_x\frac{d^2u_z}{dx^2} \qquad\qquad \frac{dM_y}{dx} = Q_z$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2M_y}{dx^2} = -q + P_x\frac{d^2u_z}{dx^2}$$

Krümmung des Biegeträgers:

$$\frac{1}{R} = -\frac{d^2 u_z}{dx^2} = \frac{M_y}{EI_{yy}}$$ (Biegetheorie nach Euler-Bernoulli)

I_{yy} Flächenmoment 2. Ordnung
E Elastizitätsmodul

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2 M_y}{dx^2} + \frac{P_x}{EI_{yy}} M_y = -q$$

Differentialgleichung der Biegelinie:

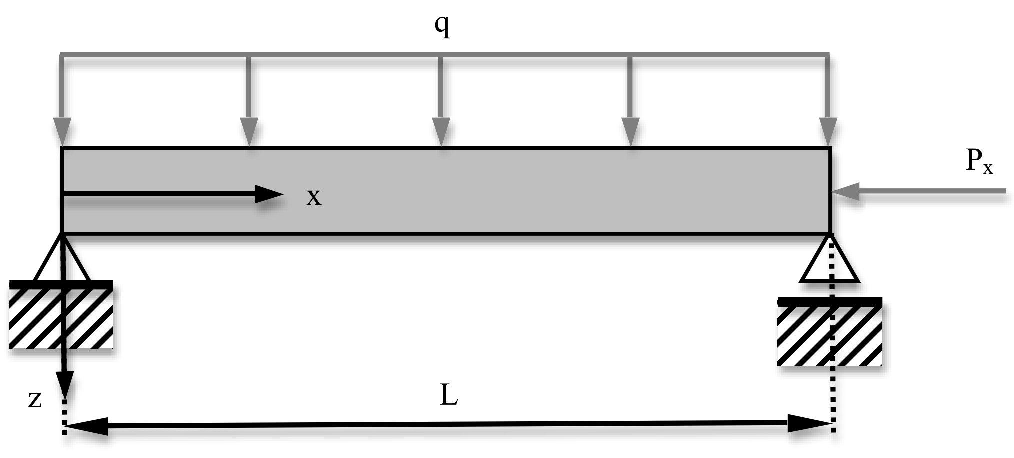
$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_{yy} \frac{d^2 u_z}{dx^2} \right) + P_x \frac{d^2 u_z}{dx^2} = q$$

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} + \kappa^2 M_y = -q \qquad \text{mit} \qquad \kappa^2 = \frac{P_x}{EI_{yy}}$$

allgemeine Lösung:

$$M_y(x) = C_1 \cos \kappa x + C_2 \sin \kappa x - \frac{q}{\kappa^2}$$

Lagerung:



Randbedingungen (Lager):

$$M_y(x=0) = 0 = C_1 - \frac{q}{\kappa^2} \qquad M_y(x=L) = 0 = C_1 \cos \kappa L + C_2 \sin \kappa L - \frac{q}{\kappa^2}$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = \frac{q}{\kappa^2} \qquad C_2 = \frac{q}{\kappa^2}\frac{1-\cos\kappa L}{\sin\kappa L}$$

Additionstheoreme der Winkelfunktionen

$$\begin{aligned}\cos\kappa L &= 1-2\sin^2\kappa\frac{L}{2}\\ \sin\kappa L &= 2\sin\kappa\frac{L}{2}\cos\kappa\frac{L}{2}\end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad M_y(x) = \frac{q}{\kappa^2}\left[\frac{\cos\kappa\left(\frac{L}{2}-x\right)}{\cos\kappa\frac{L}{2}}-1\right]$$

Biegelinie:

$$EI_{yy}\frac{d^2u_z}{dx^2} = -M_y$$

allgemeine Lösung

$$u_z(x) = \frac{q}{P_x}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{\cos\kappa\left(\frac{L}{2}-x\right)}{\kappa^2\cos\kappa\frac{L}{2}}+C_3x+C_4\right]$$

<u>Randbedingungen (Lager):</u>

$$u_z(x=0)=0 \quad \Rightarrow \quad C_4 = -\frac{1}{\kappa^2} \qquad\qquad u_z(x=L)=0 \quad \Rightarrow \quad C_3 = -\frac{L}{2}$$

$$u_z(x) = \frac{q}{EI_{yy}}\left\{\frac{1}{\kappa^4}\left[\frac{\cos\kappa\left(\frac{L}{2}-x\right)}{\cos\kappa\frac{L}{2}}-1\right]-\frac{x}{2\kappa^2}(L-x)\right\}$$

Will P., Lämmel B.: Kleine Formelsammlung Technische Mechanik, Fachbuchverlag Leipzig, 5.Auflage, p 82-83

Vergleich Standardlösung ohne axiale Längsdruckbelastung:

$$u_z(x) = \frac{q}{24EI_{yy}}\left[xL\left(L^2-2x^2\right)+x^4\right]$$

Will P., Lämmel B.: Kleine Formelsammlung Technische Mechanik, Fachbuchverlag Leipzig, 5.Auflage, p 71-72

Maximale Durchbiegung:

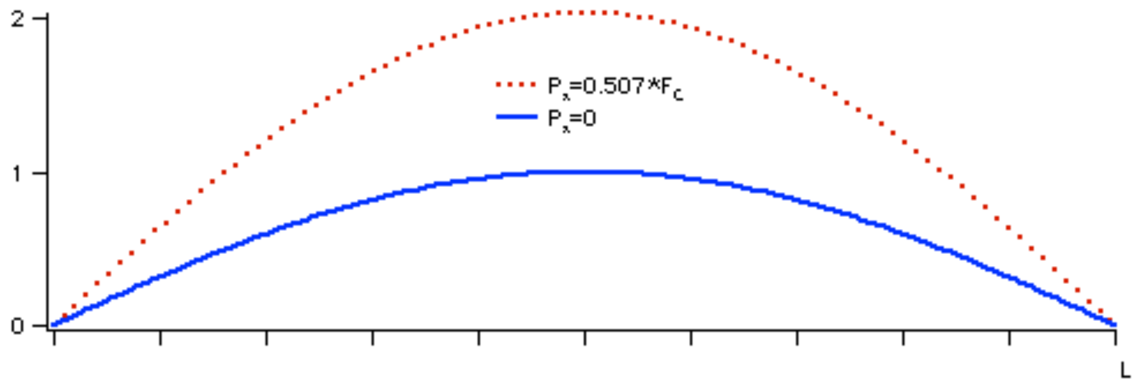
Knickbiegung:

$$u_z\left(x=\frac{L}{2}\right)=\frac{qL^4}{32EI_{yy}}\left\{\frac{2}{\left(\kappa\frac{L}{2}\right)^4}\left[\frac{1}{\cos\kappa\frac{L}{2}}-1\right]-\frac{1}{\left(\kappa\frac{L}{2}\right)^2}\right\}$$

Standardlösung:

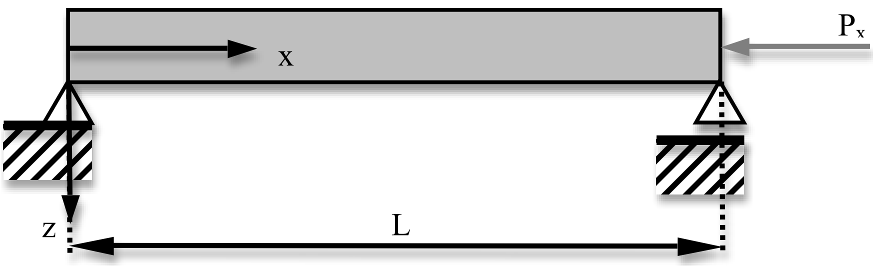
$$u_z\left(x=\frac{L}{2}\right)=\frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI_{yy}}$$

Biegelinien (normiert):



Näherungslösung:

Eulersche Knickkraft :



Will P., Lämmel B.: Kleine Formelsammlung Technische Mechanik, Fachbuchverlag Leipzig, 5.Auflage, p 101

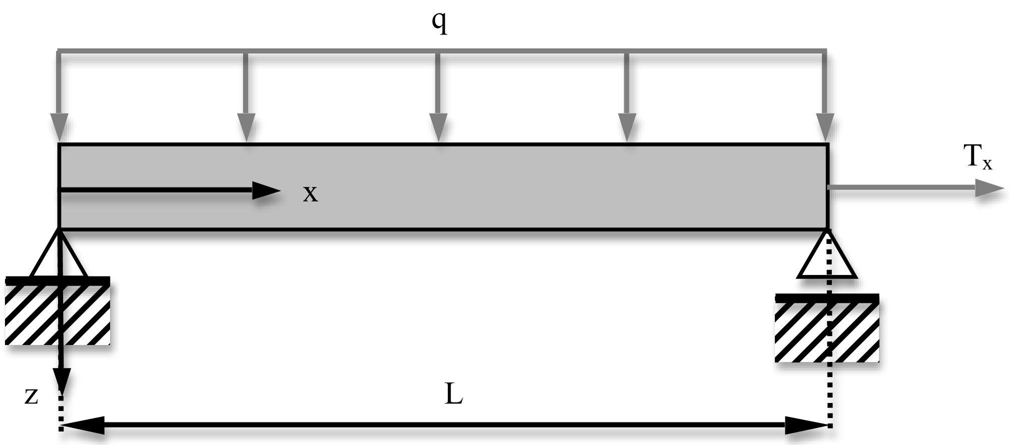
Maximale Durchbiegung:

Reihenentwicklung bzgl. κL/2

$$u_z\left(x=\frac{L}{2}\right)\approx\frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI_{yy}}\left[\frac{48}{5\pi^2\left(1-\frac{P_x}{F_C}\right)}\right]$$

---

konstante, axiale Zuglast



$$T_x = N \geq 0$$

analoge Bilanzen und Ansätze

$$\frac{d^2M_y}{dx^2}-\lambda^2 M_y=-q \qquad \text{mit} \qquad \lambda^2=\frac{T_x}{EI_{yy}}$$

$$M_y(x)=B_1\cosh\lambda x+B_2\sinh\lambda x+\frac{q}{\lambda^2}$$

Randbedingungen (Lager)

$$M_y(x=0)=0=B_1+\frac{q}{\lambda^2} \qquad M_y(x=L)=0=B_1\cosh\lambda L+B_2\sinh\lambda L+\frac{q}{\lambda^2}$$

Additionstheoreme

$$\cosh\lambda L = 1 + 2\sinh^2\lambda\frac{L}{2}$$

$$\sinh\lambda L = 2\sinh\lambda\frac{L}{2}\cosh\lambda\frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad M_y(x) = \frac{q}{\lambda^2}\left[1 - \frac{\cosh\lambda\left(\frac{L}{2} - x\right)}{\cosh\lambda\frac{L}{2}}\right]$$

Biegelinie

$$EI_{yy}\frac{d^2u_z}{dx^2} = -M_y$$

allgemeine Lösung

$$u_z(x) = -\frac{q}{T_x}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{\cosh\lambda\left(\frac{L}{2} - x\right)}{\lambda^2\cosh\lambda\frac{L}{2}} + B_3x + B_4\right]$$

Randbedingungen (Lager)

$$u_z(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_4 = \frac{1}{\lambda^2} \qquad\qquad u_z(x=L) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_3 = -\frac{L}{2}$$

$$\boxed{u_z(x) = \frac{q}{EI_{yy}}\left\{\frac{1}{\lambda^4}\left[\frac{\cosh\lambda\left(\frac{L}{2} - x\right)}{\cosh\lambda\frac{L}{2}} - 1\right] + \frac{x}{2\lambda^2}(L - x)\right\}}$$

Vergleich: Biegelinien (normiert)