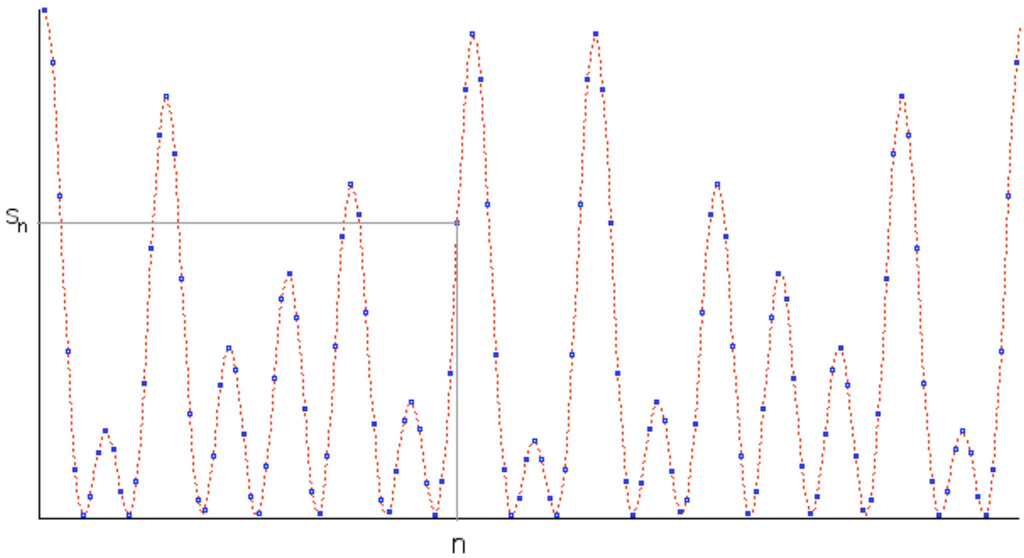
DFT



DFT
Periodische Schwingungen kann man sowohl über eine zeitliche Skala darstellen (Zeitfunktion) als auch durch ihre Spektralanteile. Klänge oder Geräusche, die sich von Schallsignalen reiner Töne unterscheiden, lassen sich in harmonische Teilschwingungen verschiedener Frequenzen zerlegen oder aus ihnen zusammensetzen (Fourier-analyse und -synthese).

Experimentell erfasste, periodische Zeitfunktionen mit N abgetasteten, diskreten Messwerten s_n zu äquidistanten Zeitpunkten

$$t_n = 2\pi \frac{n}{N}$$

können gemäß folgender Beziehung als Summe harmonischer Einzelschwingungen dargestellt werden (IDFT, inverse, diskrete Fouriertransformation):

$$s_n = \sum_{m=0}^{N-1} \left[a_m \cos\left(2\pi m \frac{n}{N}\right) + b_m \sin\left(2\pi m \frac{n}{N}\right) \right] \qquad 0 \le n \le N-1$$

Unter Verwendung der Zeigerdarstellung in der komplexen Ebene gilt:

$$s_n = \sum_{m=0}^{N-1} \left[z_m e^{i 2\pi m \frac{n}{N}} \right]$$

Die Wiedergabe der Fourierkoeffizienten z_m in Abhängigkeit von den Frequenzen bezeichnet man als diskretes Spektrum des Signals. Jede Spektrallinie charakterisiert dabei eine harmonische Schwingung, deren Frequenz dem zugehörigen Abzissenwert m entspricht.

Die i. Allg. komplexen Werte der Fourierkoeffizienten z_m ergeben sich über die diskrete Fouriertransformation (DFT) aus folgenden Beziehungen :

$$z_o = a_o = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n \qquad \text{(Mittelwert, Gleichanteil der periodischen Funktion)}$$

$$z_m = a_m - i b_m = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-i 2\pi m \frac{n}{N}} \qquad 1 \le m \le \frac{N}{2} + 1$$

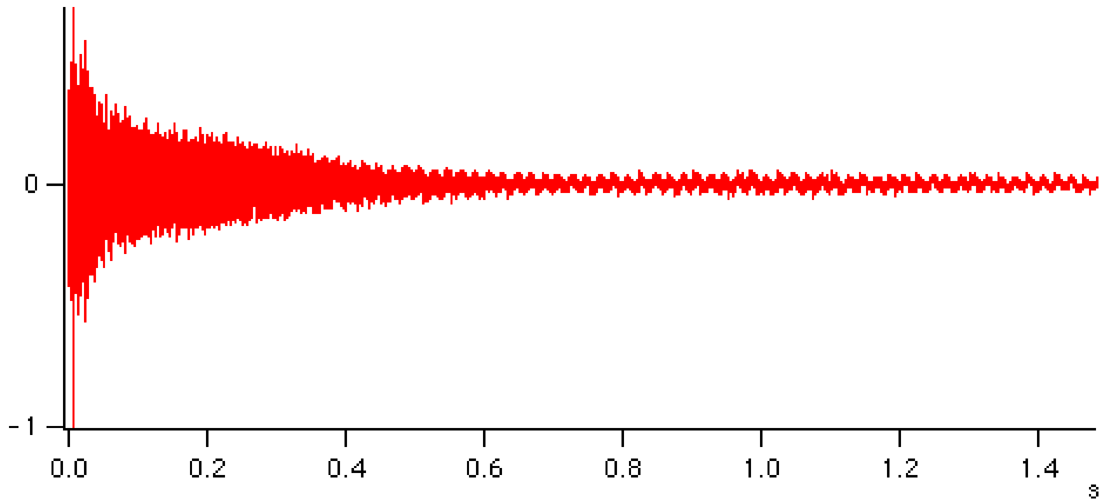
einseitiges, positives Spektrum

Die Anzahl N aller Messwerte sollte einer Potenz von 2 entsprechen. Eine reelle Zeitfunktion s vorausgesetzt, müssen zu allen positiven Frequenzen identische negative Frequenzen existieren. Die entsprechenden Fourier-koeffizienten müssen konjungiert komplex zueinander sein. Damit kann man die Fourierkoeffizienten des nega-tiven Spektrums $\left(\frac{N}{2} + 1 < m \le N\right)$ direkt aus dem einseitigen, positiven Spektrum ableiten. Ein effizienter, numerischer Algorithmus zur Berechnung der Fourierkoeffizienten ist die schnelle Fouriertransformation (FFT). Die grafische Darstellung der Amplituden :

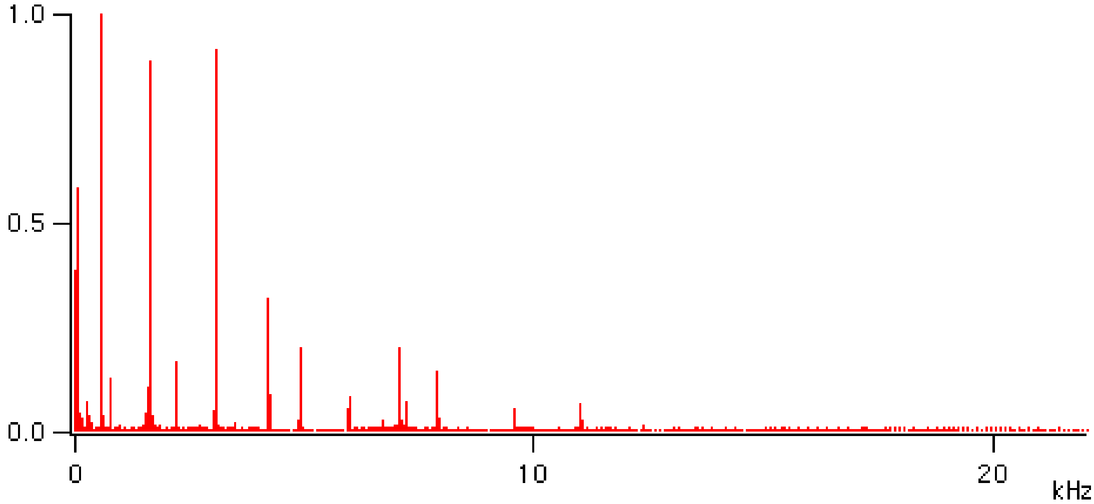
$$\sqrt{a_m^2 + b_m^2}$$

aller Teilschwingungen des Gesamtsignals über ihre Frequenzen ist das (Amplituden)-Spektrum. Im Spektrum können nur Frequenzen bis maximal zum halben Wert der Abtastfrequenz nachgewiesen werden.

pwill@htwm.de



Geräusch (Zeitdarstellung, 65456 äquidistante, normierte Abtastwerte)



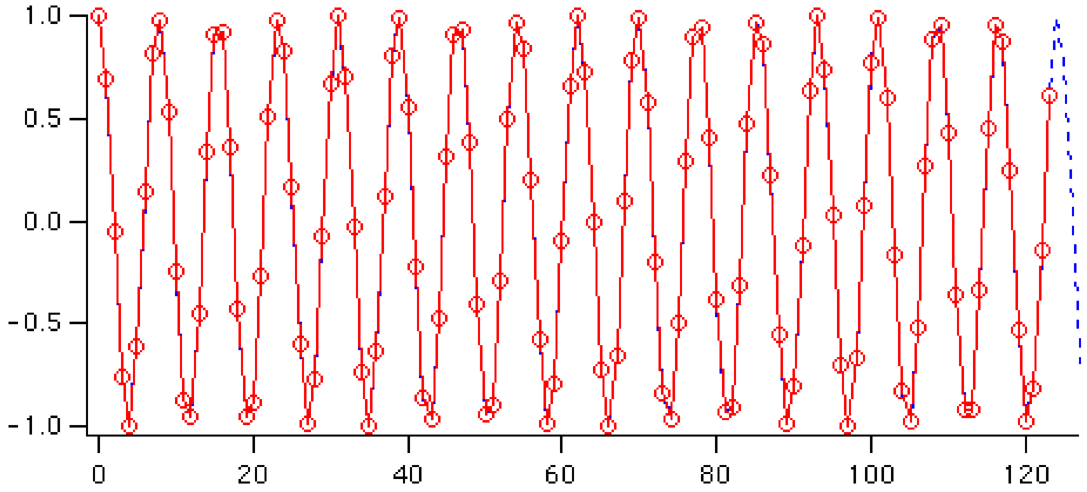
Geräusch (Amplitudenspektrum, normiert)

Die Spektralanalyse von Signalen basiert i. Allg. auf Zeitausschnitten des Signals. Das Spektrum des Signalsegments ist gegenüber dem Spektrum einer vollständigen Periode dann verändert (Verschmierungen, Glättungen, Unschärfen), wenn der Abtastzeitraum nicht eine vollständige Signalperiode oder ganzzahlige Vielfache davon erfasst und nur wenige (hunderte) Messwerte vorliegen. Ein typisches Problem ist in diesem Zusammenhang die klare Unterscheidung eng benachbarter Frequenzanteile bei deutlich unterschiedlichen Amplituden.
Durch geeignete Segmentierung aller Messwerte s_n und ihre Wichtung über das Messintervall (Fenster) lassen sich diese Verfälschungen reduzieren. Ein in der Technik sehr verbreitetes Fensterfilter ist das so genannte Hanning-Window mit den Wichtungsfaktoren:

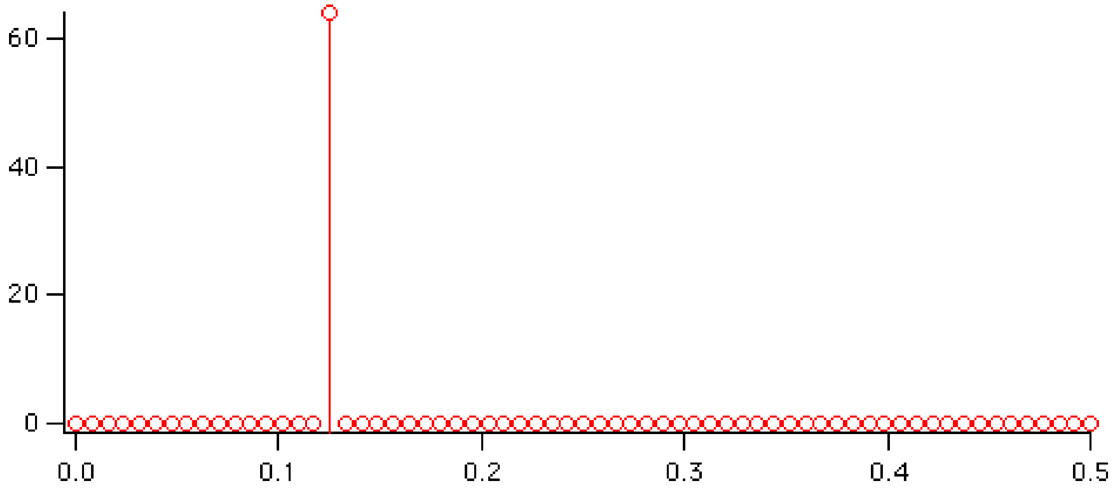
$$w(n) = \frac{1 - \cos\left(\frac{2n}{N-1}\right)}{2}$$

Das Fensterfilter verändert physikalisch gesehen, den Energieinhalt des Gesamtsignals. Aus diesem Grund erfordert das Hanning-Fenster einen Korrekturfaktor 2 für die Amplitudenwerte der Fouriertransformierten; die einzelnen Frequenzanteile bleiben aber trotz Filterung erhalten.

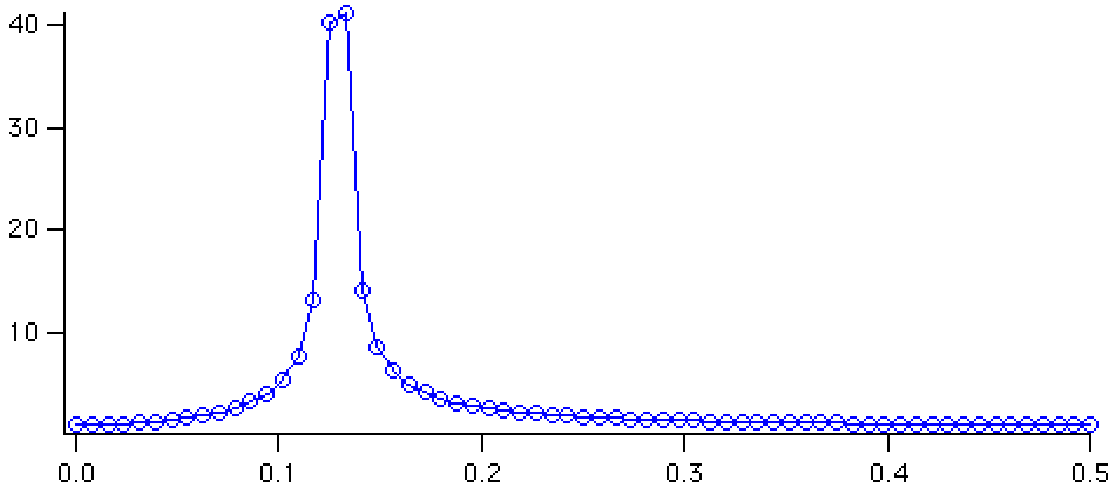
Am Beispiel einer diskret abgetasteten Cosinusschwingung mit 128 Messwerten über 16 bzw. 16.5 Perioden soll die Fensterwirkung verdeutlicht werden.



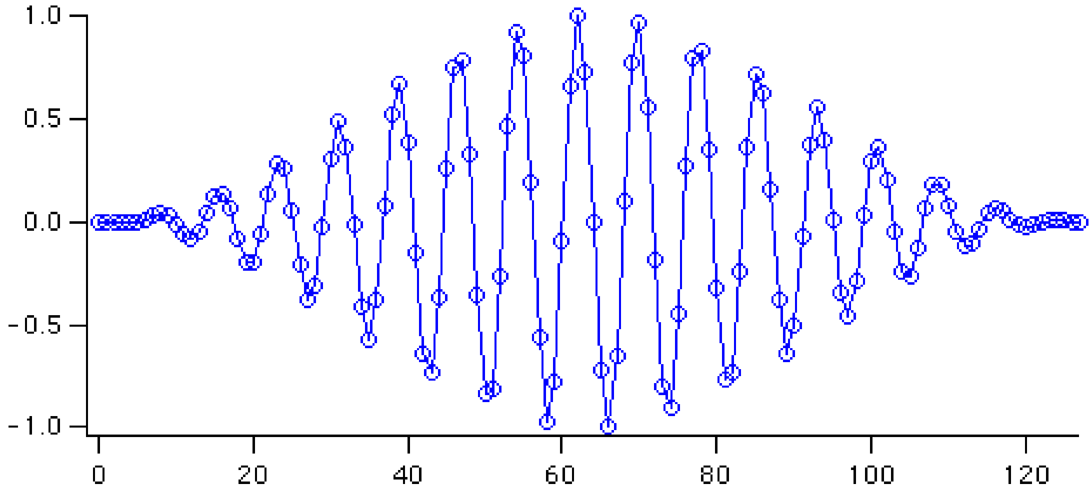
Der rote Kurvenzug entspricht einem periodischen Audiosignal. Das zugehörige Amplitudenspektrum gibt die einzelne Cosinusschwingung deutlich wieder.



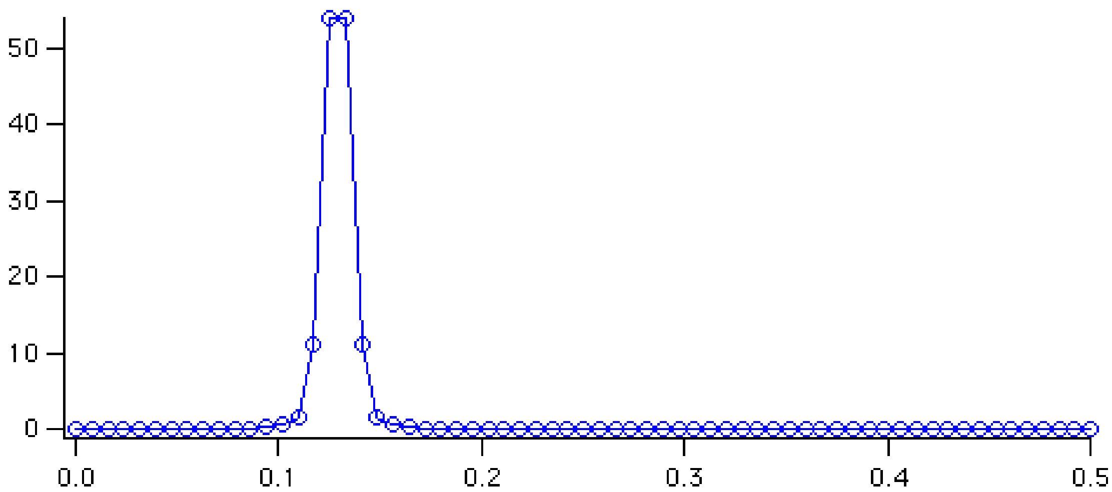
Die zusätzlichen Messwerte der gestrichelten, blauen Kurve zerstören die Periodizität des zu analysierenden Zeitabschnitts. Die Diskontinuität zwischen Start- und Endpunkt des Kurvensegments, die bei periodischen Signalen nicht vorliegen dürfte, führt zu einem verschmierten Spektrum.



Erst die Filterung der diskreten Messwerte mit dem Hanning-Fenster:



korrigiert das Amplitudenspektrum des Audiosignals, dessen Zeitrasterung keine vollständige Periode wiedergibt. Die Verschmierung des Spektrums wird deutlich verringert.



Verzerrungen

Von Linearität im Übertragungsverhalten eines Audiosystems spricht man, wenn Ausgangssignal s_2 und Eingangssignal s_1 proportional zueinander sind, ohne dass am Ausgang zusätzliche Spektralanteile auftreten, die im Eingangssignal nicht enthalten waren. Im Kontext einer praktikablen Signalverarbeitung bedeutet Linearität, dass sich mehrere Eingangssignale wechselwirkungsfrei, additiv überlagern können. Treten neben dieser Proportionalität des Systems noch Störanteile höherer Ordnung (quadratisch, kubisch, ...) auf, die mit einzelnen Gliedern einer Reihenentwicklung vergleichbar sind, werden bei harmonischen Eingangssignalen mit einer Kreisfrequenz ω (Grundschwingung) innerhalb des Systems zusätzliche Oberschwingungen mit den Kreisfrequenzen 2ω, 3ω, ... erzeugt.

$$s_2 = C_1 s_1 + C_2 s_1^2 + C_3 s_1^3 + \ldots \qquad s_1 = \hat{s} e^{i\omega t}$$

Diese zusätzlichen, im Spektrum des Ausgangssignals nachweisbaren Komponenten verfälschen das Eingangssignal. Erreichen die beschriebenen Oberschwingungen Anteile von mehr als etwa 1% der originalen Grundschwingung, so werden diese Verzerrungen hörbar.

Charakteristische Kenngrößen zur Quantifizierung dieser Störungen sind **Klirrfaktor** und Klirrkoeffizienten. Der Klirrfaktor ist definiert als Effektivwert aller Oberschwingungen normiert durch den Effektivwert des Gesamtsignals. Die Klirrkoeffizienten entsprechen den Einzelanteilen der verschiedenen Oberschwingungen am Gesamtsignal..

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{l=2}^{\infty} |z_l|^2}}{\sqrt{\sum_{l=1}^{\infty} |z_l|^2}}$$

Summiert wird über die Fourierkoeffizienten des Amplitudenspektrums, die der Grund- bzw. den Oberschwingungen im Ausgangssignal entsprechen.; praktisch genügt es, die Summen bis etwa zum Index 5 zu berechnen; Terme höherer Ordnungen sind i. Allg. vernachlässigbar.

Klirrfaktoren unter 0.1% sind nicht mehr hörbar.

Eine zusätzliche, unerwünschte Begleiterscheinung nichtlinearer Komponenten im Übertragungsverhalten von Audiosystemen sind **Intermodulationsverzerrungen**. Am einfachsten lassen sich derartige Effekte am Beispiel eines Zweitonsignals mit den Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 darstellen. Betrachtet man nur das quadratische Glied der Kennlinie

$$s_2 = C_1 s_1 + C_2 s_1^2 + \ldots$$

so ergeben sich bei additiver Einspeisung zweier Töne am Eingang folgende nichtlinearen Verzerrungen am Ausgang des Systems:

$$(a_1 \cos\omega_1 t + a_2 \cos\omega_2 t)^2 = a_1^2 \cos^2 \omega_1 t + 2 a_1 a_2 \cos\omega_1 t \cos\omega_2 t + a_2^2 \cos^2 \omega_2 t$$
$$= \frac{1}{2}\left[a_1^2 (1 + \cos 2\omega_1 t) + a_2^2 (1 + \cos 2\omega_2 t)\right] + a_1 a_2 \left[\cos(\omega_1 + \omega_2) t + \cos(\omega_1 - \omega_2) t\right]$$

Die Störung enthält neben den bereits besprochenen Klirrtermen mit doppelten Frequenzen der Nutzsignale weitere Summanden mit Summen- und Differenzenfrequenzen der beiden Originaltöne. Beide Signale werden infolge der nichtlinearen Kennlinienanteile nicht mehr unabhängig voneinander übertragen sondern sie beeinflussen sich gegenseitig.

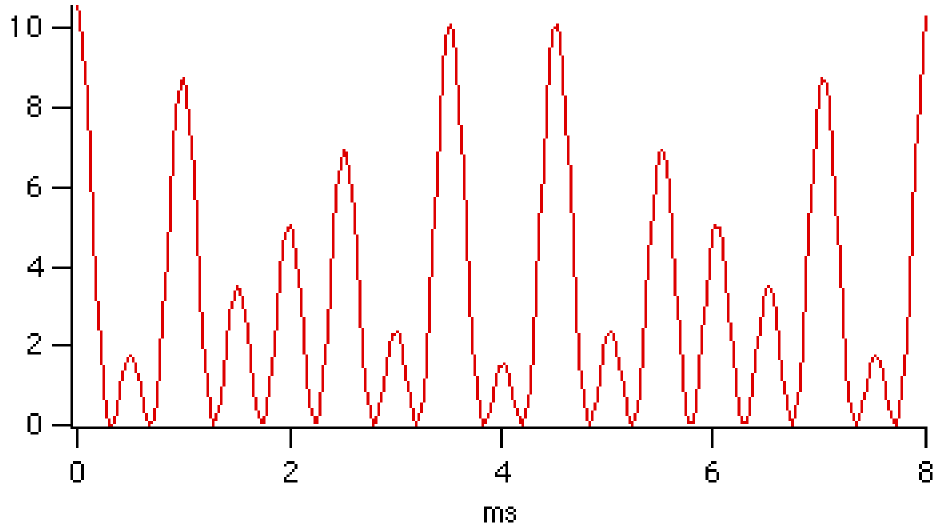
pwill@htwm.de

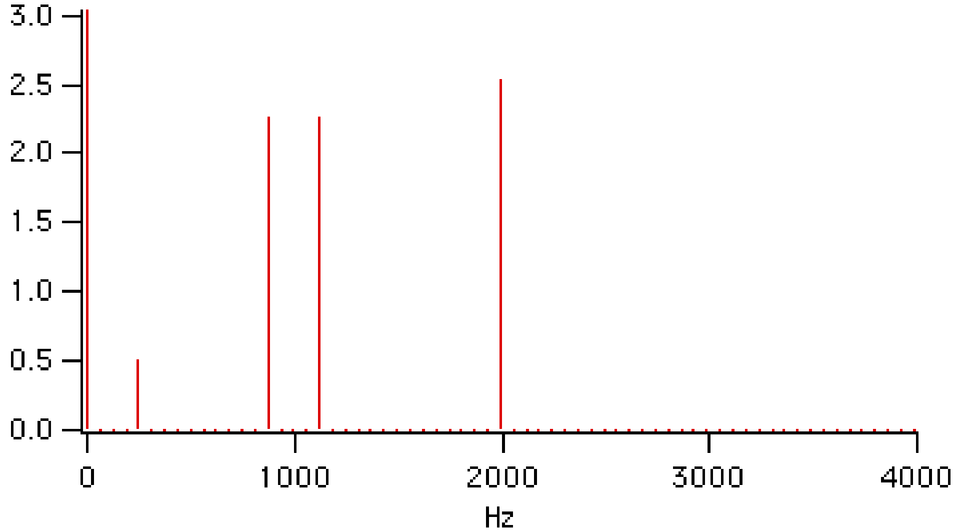
Die folgende **Fourieranalyse** eines quadratisch gestörten 2-Tonsignals, bestehend aus den beiden Einzelkomponenten:

$$f_1 = 125\,Hz \qquad a_1 = 1.00$$
$$f_2 = 1000\,Hz \qquad a_2 = 2.25$$

verdeutlicht diese Gegebenheiten:

Zeitfunktion (256 äquidistante Stützpunkte)





Spektraldarstellung