Frequenzgang, Impulsantwort, Sprungantwort

Der Frequenzgang h(ω) eines Systems gibt den Effektivwert eines Signals am Systemausgang im Verhältnis zum entsprechenden Wert des Eingangssignals (Erregung) über den gesamten Frequenzbereich an. Die Amplituden der beteiligten Schwingungen am Eingang werden bei der Übertragung durch das System mit dem Faktor h(ω) verstärkt oder abgeschwächt. Die Fouriersche Umkehrtransformation des Frequenzgangs ist die Impulsantwort; sie charakterisiert die Reaktion des Systems auf die Anregung mit einem Diracimpuls. Die kausale Systemantwort auf eine beliebig zeitlich veränderliche Anregung χ(t) ergibt sich aus der Faltung der Anregungsfunktion mit der Impulsantwort. Die Reaktion des Systems auf die transiente Erregung mit einer Einheitssprungfunktion ist die Sprungantwort. Die Differentiation der Sprungantwort führt auf die Impulsantwort.

Am Beispiel des singulären Masse-Feder-Schwingers sollen die prinzipiellen Eigenschaften und Kennwerte von Frequenzgang, Impuls- und Sprungantwort verdeutlicht werden. Dieses erregte, gedämpfte System wird durch eine lineare, inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung beschrieben:

$$\ddot{\zeta} + 2\omega D\dot{\zeta} + \omega^2\zeta = \chi(t)$$

$\zeta(t)$	aktuelle Auslenkung
ω	Kreisfrequenz der freien, ungedämpften Schwingung
D	Dämpfungsgrad

Impulsantwort
Diracstoß (Beschleunigung)

$$\chi(t) = v_o\delta(t)$$

v_o	Anfangsgeschwindigkeit
$\delta(t)$	Diracfunktion

Anfangsbedingung

$$\zeta(0) = 0$$

Impulsantwort: D>1 Kriechfall

$$\zeta(t) = \frac{v_o e^{-\omega Dt}}{2\mu}\left[e^{\mu t} - e^{-\mu t}\right]$$

$$\mu = \omega\sqrt{D^2 - 1}$$

Impulsantwort: D=1 aperiodischer Grenzfall

$$\zeta(t) = v_o t e^{-\omega t}$$

pwill@htwm.de

Impulsantwort: D<1 Schwingfall

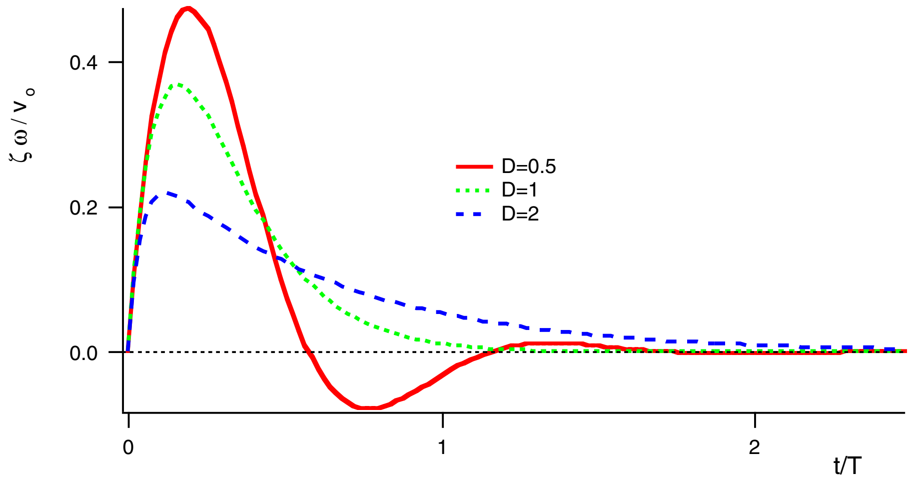
$$\zeta(t) = \frac{v_o}{\omega_D} e^{-\omega D t} \sin(\omega_D t)$$

Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-D^2} = \frac{2\pi}{T_D}$$

ω	Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung
D	Dämpfungsgrad
T_D	Periodendauer der gedämpften Schwingung

Impulsantwort



$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

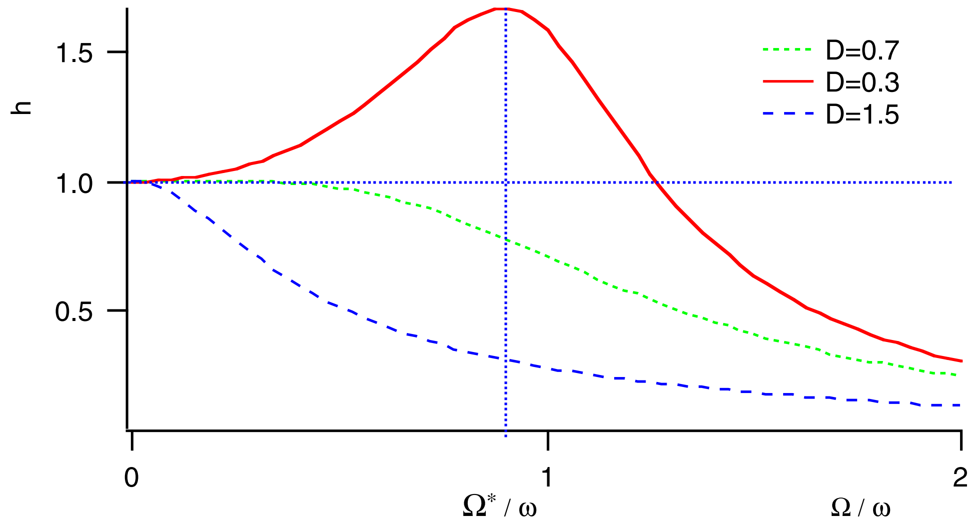
Dämpfungsgrad (experimentelle Abschätzung)

$$D^2 = \frac{1}{1 + \frac{4\pi^2}{\ln^2(A_1/A_2)}}$$

A_1, A_2	aufeinander folgende Amplitudenwerte im Abstand einer Periode T_D
T_D	Periodendauer der gedämpften Schwingung

pwill@htwm.de

Frequenzgang



Ω	Erregerkreisfrequenz

Resonanz

$$\frac{\Omega^*}{\omega} = \sqrt{1-2D^2} \qquad D^2 < 0.5$$

Sprungantwort
Sprungfunktion (Beschleunigung)

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ F_o / m & t \geq 0 \end{cases}$$

F_o	Erregerkraft
m	erregte Masse

Anfangsbedingung

$$\zeta(0) = 0 \quad \dot{\zeta}(0) = 0$$

Sprungantwort: D>1 Kriechfall

$$\zeta(t) = \frac{F_o}{\omega^2 m}\left[1 - \frac{e^{-\omega D t}}{2\mu}\left(e^{\mu t}(\omega D + \mu) - e^{-\mu t}(\omega D - \mu)\right)\right]$$

$$\mu = \omega\sqrt{D^2 - 1}$$

ω	Kreisfrequenz der freien, ungedämpften Schwingung
D	Dämpfungsgrad

Sprungantwort: D=1 aperiodischer Grenzfall

$$\zeta(t) = \frac{F_o}{\omega^2 m}\left[1 - (1 + \omega t)e^{-\omega t}\right]$$

Sprungantwort: D<1 Schwingfall

$$\zeta(t) = \frac{F_o}{\omega^2 m}\left[1 - \frac{\omega}{\omega_D} e^{-D\omega t} \cos(\omega_D t - \varphi)\right]$$

Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung

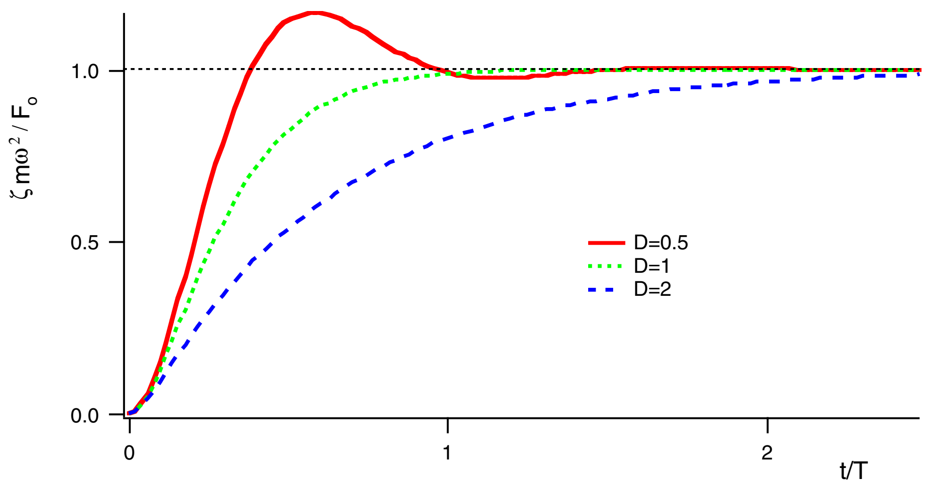
$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - D^2}$$

D	Dämpfungsgrad
ω	Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung

Phasenverschiebung

$$\tan\varphi = \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}}$$

Sprungantwort



$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

pwill@htwm.de