Schiefe Biegung

Werden Biegeträger mit einem unsymmetrischen Querschnittsprofil so auf Biegung belastet, dass das lokale Biegemoment in der (y,z)-Ebene des Querschnitts simultan mit 2 Komponenten (M_y, M_z) wirkt, so spricht man von schiefer Biegung.
In Analogie zu den Ansätzen für gerade Biegung bei achsensymmetrischer Belastung entweder um die y-Achse:

$$\sigma_{xx} \sim z$$

bzw. um die z-Achse:

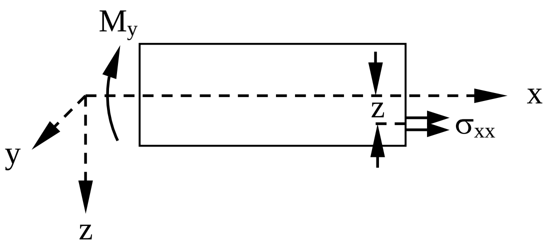
$$\sigma_{xx} \sim y$$

wird im Fall der schiefen Biegung von folgendem Ansatz für die lokale Biegespannung ausgegangen:

$$\sigma_{xx}(x,y,z) = B(x)\,y + C(x)\,z$$

Das Momentengleichgewicht bzgl. der y-Achse nimmt die Form an:

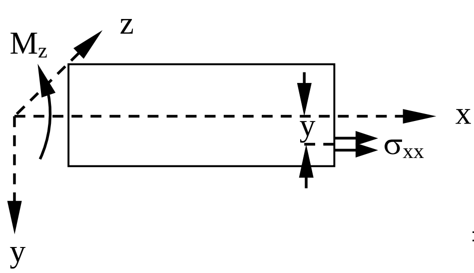
$$-M_y(x) + \iint_A z\sigma_{xx}(x,y,z)\,dA = 0$$



$$\Rightarrow \quad M_y(x) = -B(x)\,I_{yz} + C(x)\,I_{yy}$$

Eine analoge Beziehung gilt für die Bilanz bzgl. der z-Achse:

$$-M_z(x) - \iint_A y\sigma_{xx}(x,y,z)\,dA = 0$$



$$\Rightarrow \quad M_z(x) = -B(x)\,I_{zz} + C(x)\,I_{zy}$$

mit den axialen Flächenmomenten 2. Ordnung und den Deviationsmomenten:

$$I_{yy} = \iint_A z^2 dA \qquad I_{zz} = \iint_A y^2 dA \qquad I_{yz} = I_{zy} = -\iint_A yz\,dA$$

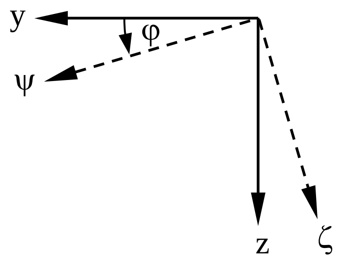
Die Kräftebilanz in Balkenlängsrichtung lautet:

$$\iint_A \sigma_{xx}(x,y,z)\,dA = 0 = B(x)\iint_A y\,dA + C(x)\iint_A z\,dA = \left[B(x)\,y_{SA} + C(x)\,z_{SA}\right]A$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Koordinaten (0,0,x) die Verbindungslinie der Profil-schwerpunkte (y_{SA},z_{SA}) bilden.
Die Substitution der Koeffizienten B(x), C(x) im Ansatz für die Biegespannungen durch die lokalen Biegemomente aus den Momentenbilanzen ergibt folgende Beziehung für die lokalen Biegespannungen:

$$\sigma_{xx}(x,y,z) = \frac{M_y(x)I_{zz} - M_z(x)I_{yz}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}I_{zy}}\,z - \frac{M_z(x)I_{yy} - M_y(x)I_{zy}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}I_{zy}}\,y$$

Die Deviationsmomente der Flächen nehmen die Werte Null an, wenn mindesten eine der Koordinaten-Achsen y oder z eine Symmetrieachse ist.
Liegt keine derartige Symmetrie vor, so existiert trotzdem für jeden Querschnitt ein Haupt-achsensystem, in dem keine Deviationsmomente auftreten. Die Flächenmomente 2. Ordnung in zwei gegeneinander gekippten Bezugssystemen berechnen sich gemäß:



$$\psi = y\cos\varphi + z\sin\varphi$$

$$\zeta = -y\sin\varphi + z\cos\varphi$$

$$I_{\psi\psi} = \iint_A \zeta^2 dA = \iint_A \left[y^2\sin^2\varphi - 2yz\sin\varphi\cos\varphi + z^2\cos^2\varphi\right]dA$$

$$I_{\psi\psi} = \frac{1}{2}\left(I_{yy} + I_{zz}\right) + \frac{1}{2}\left(I_{yy} - I_{zz}\right)\cos 2\varphi + I_{yz}\sin 2\varphi$$

$$I_{\zeta\zeta} = \iint_A \psi^2 dA = \iint_A \left[y^2\cos^2\varphi + 2yz\sin\varphi\cos\varphi + z^2\sin^2\varphi\right]dA$$

$$I_{\zeta\zeta} = \frac{1}{2}\left(I_{yy} + I_{zz}\right) - \frac{1}{2}\left(I_{yy} - I_{zz}\right)\cos 2\varphi - I_{yz}\sin 2\varphi$$

$$I_{\psi\zeta} = -\iint_A \psi\zeta\,dA = \iint_A \left[\left(y^2 - z^2\right)\sin\varphi\cos\varphi - yz\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)\right]dA$$

$$I_{\psi\zeta} = -\frac{1}{2}\left(I_{yy} - I_{zz}\right)\sin 2\varphi + I_{yz}\cos 2\varphi$$

In Analogie zu den Transformationen der Komponenten des Spannungstensors in der Ebene, die den formal gleichen Beziehungen genügen, existiert in der Orientierungsrichtung:

$$\varphi_H = \frac{1}{2}\arctan\frac{I_{yz}}{\frac{1}{2}\left(I_{yy}-I_{zz}\right)}$$

zur y-Achse ein Hauptachsensystem mit den Hauptflächenmomenten:

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}\left(I_{yy}+I_{zz}\right)\pm\sqrt{\frac{\left(I_{yy}-I_{zz}\right)^2}{4}+I_{yz}^2}$$

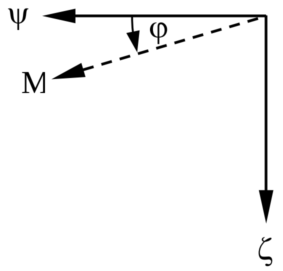
Die Flächendeviationsmomente verschwinden im Hauptachsensystem, wie oben behauptet. Die Biegespannungen im Hauptachsensystem (ψ,ζ) nehmen folgende Werte an:

$$\sigma_{xx}\left(x,\psi,\zeta\right) = \frac{M_\psi\left(x\right)}{I_{\psi\psi}}\zeta - \frac{M_\zeta\left(x\right)}{I_{\zeta\zeta}}\psi$$

<u>Wie verhalten sich die zugehörigen Durchbiegungen?</u>

Setzt man eine lokale Belastung durch ein Biegemoment:

$$\left(M_\psi, M_\zeta\right) = M\left(\cos\varphi, \sin\varphi\right) \qquad \tan\varphi = \frac{M_\zeta}{M_\psi}$$



im Hauptachsensystem (ψ,ζ) voraus, wobei das Moment i. Allg. nicht in Richtung der Hauptachsen ausgerichtet sein muss, so ergibt sich die Lage der Spannungsnull-Linie im Balkenquerschnitt aus der Beziehung:

$$\sigma_{xx}\left(x,\psi,\zeta\right) = 0 = \frac{M\cos\varphi}{I_{\psi\psi}}\zeta - \frac{M\sin\varphi}{I_{\zeta\zeta}}\psi \qquad \Rightarrow \quad \zeta = \psi\left(\frac{I_{\psi\psi}}{I_{\zeta\zeta}}\tan\varphi\right)$$

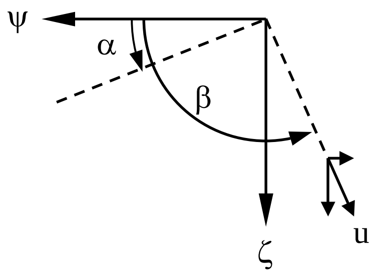
Bei der vorliegenden Gleichung handelt es sich um eine Gerade in der Ebene, welche durch den Koordinatenursprung verläuft; der Anstiegswinkel hat den Wert:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{I_{\psi\psi}}{I_{\zeta\zeta}}\tan\varphi\right)$$

Die Normale auf der Spannungsnull-Geraden schließt einen Winkel β zur Hauptachse ψ ein :

$$\tan\beta = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{I_{\zeta\zeta}}{I_{\psi\psi}}\frac{1}{\tan\varphi} = -\frac{I_{\zeta\zeta}}{I_{\psi\psi}}\frac{M_\psi}{M_\zeta}$$

Die resultierende Durchbiegung erfolgt senkrecht zur Spannungsnull-Linie, also in Richtung β zur Hauptachse ψ.



Die beiden Komponenten der lokalen Durchbiegung $\left(u_\psi, u_\zeta\right)$ im Hauptachsensystem stehen im Verhältnis:

$$\frac{u_\psi}{u_\zeta} = -\tan\alpha \qquad \text{(s. Skizze)}$$

zueinander.
Jedes der beiden Teilmomente bewirkt eine Biegung um die entsprechende Hauptachse; aus der Theorie der geraden Biegung folgt:

$$\frac{d^2u_\zeta}{dx^2} = -\frac{M_\psi}{EI_{\psi\psi}} \qquad \frac{d^2u_\psi}{dx^2} = \frac{M_\zeta}{EI_{\zeta\zeta}}$$

Der Vergleich mit den vorausgehenden Resultaten ergibt:

$$\frac{\frac{d^2u_\zeta}{dx^2}}{\frac{d^2u_\psi}{dx^2}} = -\frac{M_\zeta}{M_\psi}\frac{I_{\psi\psi}}{I_{\zeta\zeta}} = \frac{u_\psi}{u_\zeta}$$

d.h. die Einzelkomponenten der Auslenkungen im Hauptachsensystem sind nicht unabhängig voneinander; sie bedingen sich gegenseitig.
.